PAUL GEISLER

Abstract. Über die Herstellung virtueller Landschaften mit Fourier-Reihen

1. Fourier-Reihe

Für $f(x)$ analytisch, d.h. unendl. oft differenzierbar, gilt:

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{i=0}^{\infty} a_i * sin(i*h) + b_i * cos(i*h)$$

mit entsprechenden Koeffizienten a_i, b_i geht man vom Ursprung aus, bleibt nur noch

$$f(h) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i * sin(i*h) + b_i * cos(i*h)$$

Für eine n-dimensionale Funktion sieht das so aus:

$$f(h) = \sum_{i_1=0, i_2=0, \ldots, i_n=0}^{\infty, \infty, \ldots, \infty} a_{i_1, i_2, \ldots, i_n} * \prod_{k=1}^{n} sin(i_k * h_k) + b_{i_1, i_2, \ldots, i_n} * \prod_{k=1}^{n} cos(i_k * h_k)$$

also im $\mathbb{R}^2$ so:

$$f(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} * sin(i*x) * sin(j*y) + b_{ij} * cos(i*x) * cos(j*y)$$

mit den Koeff.matritzen $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$.

2. Die Landschaft

Sei $f(x,y)$ also die Höhe der Landschaft. Die Koeff. dazu sind dann A, B. Der maximal "darstellbare Detailgrad" entspricht grad der höchsten Frequenz:

$$f_{max} = \min_i (a_{ij} \neq 0 \vee a_{ji} \neq 0) \forall j$$

Ausserdem kann man statt der Frequenzen $F = \{1, 2, 3, ...\}$(unter Abstrichen der exakten Approximation) auch z.B. $F = \{2^0, 2^1, 2^2, ...\}$ benutzen, also die Summe

$$f(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} * sin(2^i * x) * sin(2^j * y) + b_{ij} * cos(2^i * x) * cos(2^j * y)$$

Damit die Reihe konvergiert, empfiehlt sich für A, (analog für B): $\lim_{i\to\infty} a_{ij} = 0$ und $\lim_{i\to\infty} a_{ji} = 0 \forall j$. Besser natürlich Konvergenz sichernde: $a_{ij} = o(1/i, 1/j)$ also eine Positionierung unter der divergenten Harmonischen Reihe $\sum_i^{\infty} 1/i$.

Dank an Wolf Geisler.

3. Ein Algorithmus

gegeben: x,y. gesucht: Höhe $z = f(x, y)$

```
z=0
for i=1 to n
    for j=1 to n
        z+=a[i][j] * sin(2^i*x) * sin (2^j*y)
        z+=b[i][j] * cos(2^i*x) * cos (2^j*y)
    next j
next i
```

wobei n die zu benutzende Frequenz $f_{max}^{2^n}$ angibt, mit A und B sind mindestens $\in \mathbb{R}^n$ sind.