Diplomarbeit

Stochastische Attraktoren: Forward-, Pullback- und schwache Attraktion

Paul Geisler

2. November 2004

Vorgelegt als Diplomarbeit bei PD Dr. Hans Crauel
Fachbereich Analysis und Systemtheorie, Fakultät für Mathematik
Technische Universität Ilmenau

Diese Arbeit zeigt die Einführung des Begriffes des Attraktors für zufällige dynamische Systeme, die Vielfältigkeit der „sinnvollen“ Attraktionsbegriffe und deren Zusammenhänge untereinander, sowie Kriterien für das Auftreten dieser Attraktoren an einer wichtigen Klasse zufälliger dynamischer Systeme.

Inhaltsverzeichnis

1. Einführung

Attraktoren sind unter einer Dynamik invariante Mengen, die Trajektorien anziehen. Sie gehören zu den wichtigsten Untersuchungsobjekten der deterministischen Dynamik. Die Bestimmung der Attraktoren und Instabilitäten (*Repelloren*) eines dynamischen Systems ergibt starke qualitative Aussagen über das oft anwendungsrelevante Langzeitverhalten des Systems. Ein sehr einfaches Beispiel ist die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}x(t) = -x(t)$$

deren Lösung für beliebige Anfangswerte $x(0) = x_0$ in unendlicher Zeit gegen 0 konvergiert. Wir nennen die Menge $\mathcal{A} = \{0\}$ deshalb einen *Attraktor* für die Lösung der Differentialgleichung.

Viele Systeme sind allerdings nur teilweise determinstisch charakterisierbar und enthalten einen nicht unrelevanten zufälligen Einfluss. Die vereinfachende Betrachtung eines zugeordneten deterministischen Systems ist nicht zuletzt deshalb häufig nutzlos, da gerade das Stabilitätsverhalten oftmals sehr empfindlich von zufälligen Einflüssen anhängt, und diese (wie in z.B. [HC98] gezeigt) starke qualitative Veränderung zur Folge haben können. Daher stellt sich die Frage nach den Attraktoren eines zufallsgestörten Systems.

Dass die Definition eines sinnvollen Attraktor-Begriffes sich als vielfältiger als im deterministischem Fall erweist, schlägt sich in der Definition verschiedener Modelle eines zufälligen Attraktors nieder, die hier verglichen und auf Zusammenhänge untersucht werden sollen.

Des weiteren greift die Arbeit auf verschiedene „Ansichten" stochastischer Prozesse zurück: Die *zufälligen dynamische Systeme* (eine recht allgemeine Definition eines durch zufällige Einflüsse gestörten dynamischen Systems), *stochastischen Differentialgleichungen* (Differentialgleichungen über stochastischen Integralen, die über der Brown'schen Bewegung integrieren) und die Darstellung der *Diffusionsprozesse* (Eine Beschreibung zufälliger Bewegung ohne „Erinnerungsvermögen"), derer Kalküle wir uns jeweils bedienen. Dabei stellt sich heraus, dass eine doch recht große, anwendungsrelevante Klasse stochastischer Prozesse in allen diesen Formen darstellbar ist und wir jeweils wertvolle Resultate nutzen können.

Der Zugang zu diesen vielfältigen Methoden wird hier grundlegend vorgestellt, einige der nötigsten Werkzeuge, unter anderem *Martingalbegriffe*, die *Itô-Formel* usw. werden außerdem im Anhang für unsere Zwecke gerecht zitiert. Für einen gründlichen Zugang empfiehlt sich folgende Literatur: Zu den zufälligen dynamischen Systemen („random dynamical systems") bietet [Arn98] einen umfassenden Einstieg. Stochastische Differentialgleichungen werden in [IW81] behandelt. Über die Diffusionsprozesse findet man umfassendes in [IJ65]; dieses Buch ist sehr grundlegend, weicht allerdings etwas von den heute üblichen Darstellungen ab. Eine modernere Formulierung findet sich ebenfalls in [IW81]. Mit der Thematik der Martingale beschäftigt sich [RY99].

Diese Arbeit fasst einige Resultate aus der recht jungen Forschungsgeschichte um die stochastischen Attraktoren zusammen, wie sie in folgenden Arbeiten abgesteckt wurde:

- 1992 [Sch92] und 1994 [CF94]: Einführung des *Pullback-Attraktors*
- 1999 [Och99]: Einführung des *schwachen Attraktors*
- 2000 [Cra01]: Vergleich von Attraktoren verschiedener angezogener Objekte
- 2003 [OA03]: Vergleich vieler verschiedener Konvergenzbegriffe

Unser Weg orientiert sich an Michael Scheutzows Artikel [Sch02], wir gehen folgendermaßen vor: Wir werden zunächst die allgemeinste Darstellung, die *zufälligen dynamischen Systeme* definieren, und dann zu diesen mehrere sinnvolle Attraktionsbegriffe, die sich in der Art der Konvergenz unterscheiden. Wie diese zusammenhängen, und das sie alle ihre Berechtigung haben, wollen wir im folgenden nachweisen. Wir zeigen dazu in Kapitel 2, dass die Lösungen *stochastischer Differentialgleichungen* zufällige dynamische Systeme bilden, und damit haben wir eine wichtige (für Anwendungen vermutlich die wichtigste) Klasse stochastischer dynamischer Systeme erzeugt. Um allerdings die Eigenschaften der dort entstehenden Attraktoren zu untersuchen, zeigen wir, das die stochastischen Differentialgleichungen ebenfalls *Diffusionsprozesse* erzeugen, über die viele Resultate bekannt sind, die unsere Aussagen prägen werden. Damit können wir dann in Kapitel 3 Bedingungen für das Auftreten verschiedener Attraktortypen formulieren, die wir im anschließenden Kapitel 4 an einigen Beispielen vorführen. Zuletzt betrachten wir zwei spezielle Beispiele zu einer Beziehung der verschiedenen Attraktoren, deren genauer Zusammenhang noch unklar ist.

Wir beginnen also in diesem Kapitel zunächst mit der hier verwendeten Definition zufälliger dynamischer Systeme und den Attraktoren.

1.1. Zufällige Dynamische Systeme

Zufällige dynamische Systeme beschreiben das Verhalten dynamischer Systeme unter einem zufälligen Einfluss z.B. dem der Brown'schen Bewegung. Dieser Einfluss wird als *metrisches dynamisches System* modelliert:

Definition 1.1 (Metrisches Dynamisches System (MDS)). Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, so heißt die Abbildung

$$\theta : \mathbb{T} \times \Omega \to \Omega,\ (t, \omega) \to \theta(t)\omega$$

mit $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{T} = \mathbb{R}^+$ *metrisches dynamisches System (MDS)* falls:

1. $\theta(0) = \mathrm{id}$, $\theta(s) \circ \theta(t) = \theta(s+t)$ für alle $s, t \in \mathbb{T}$
2. $(t, \omega) \to \theta(t)\omega$ messbar
3. $\theta(t)\mathbb{P} = \mathbb{P}$ für alle $t \in \mathbb{T}$.

Ein Beispiel:

Beispiel 1.2 (MDS zum Wienerprozess). *Da die Annahme brown'scher Bewegung in Anwendungen recht häufig ist und wir diese auch im Weiteren verwenden wollen, werden wir ein durch den Wienerprozess induziertes MDS auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ konstruieren.*

Wähle $\Omega = \{\omega \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \omega(0) = 0\}$ als Menge aller stetigen, im Ursprung verschwindenden Funktionen. Zur Konstruktion von $\mathcal{F}$ als Borel-σ-Algebra mit geeigneter Topologie erzeugen wir eine vollständige Metrik über Ω, wir benutzen für $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$

$$d(\omega_1, \omega_2) := \sum_1^\infty \frac{1}{2^n} \frac{\|\omega_1 - \omega_2\|_{\infty,n}}{1 + \|\omega_1 - \omega_2\|_{\infty,n}} \ \mathit{mit}\ \|\omega\|_{\infty,n} = \sup_{[-n,n]} |\omega(\cdot)|$$

als Metrik für die Topologie offener Mengen über Ω, womit wir die Borel-σ-Algebra $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{B}_d(\Omega))$ erhalten.

Der (zweiseitige, $\mathbb{R}^1$-) Wienerprozess *$(W_t : \Omega \to \mathbb{R})_{t \in \mathbb{R}}$ und damit das zugehörige* Wiener Maß *$\mathbb{P}$ sind wie folgt charakterisiert:*

1. *$X_0 = 0$ $\mathbb{P}$-fast-sicher*
2. *$W_{t_2} - W_{t_1}$ und $W_{t_4} - W_{t_3}$ sind unabhängig für alle $t_i \in \mathbb{R}, i = 1 \dots 4$ mit $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$*
3. *$W_s - W_t \sim \mathcal{N}(0, |s-t|)$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$.*

wobei $\mathcal{N}$ die $\mathbb{R}^1$-Normalverteilung bezeichnet.

Der Shift-Operator $\theta.(\cdot)$ wird wie folgt definiert:

$$\theta : \mathbb{R} \times \Omega \to \Omega,\ (\theta_t\omega)(s) := (\omega(t+s) - \omega(t))$$

und ist $\mathbb{P}$-erhaltend nach folgender grundlegender Eigenschaft des Wienerprozesses: Ist W_t ein Wienerprozess, so auch $X_t := W_{t+s} - W_s$ für alle $s \in \mathbb{R}$, siehe Anhang: Lemma (A.9). Der Shift-Operator erfüllt offensichtlich die Fluss-Eigenschaft (1.) der Definition MDS (1.1).

Über dem durch das metrische System modellierten zufälligen Einfluss wird die Dynamik als ein *Cozykel* dargestellt:

Definition 1.3 (Zufälliges dynamisches System, ZDS). Ein Paar (θ, φ) mit dem MDS $\theta : \mathbb{T} \times \Omega \to \Omega$ mit $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{T} = \mathbb{R}^+$ auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und

$$\varphi : \mathbb{T} \times \Omega \times X \to X,\ (t, \omega, x) \to \varphi(t, \omega, x)$$

auf dem metrischen Raum X heißt *(stetiges, globales) zufälliges dynamisches System (ZDS)* wenn φ ein *stetiger Cozykel* über θ ist:

1. (Stetigkeit) $\varphi(\cdot, \omega, \cdot) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T} \times X, X)$ für alle $\omega \in \Omega$
2. (Cozykel) $\varphi(0, \omega, \cdot) = \mathrm{id}$ und $\varphi(s+t, \omega, \cdot) = \varphi(t, \theta(s)\omega, \cdot) \circ \varphi(s, \omega, \cdot)$ für alle $s, t \in \mathbb{T}$.

Definition 1.4 (glattes ZDS). Ein ZDS heißt *glattes zufälliges dynamisches System der Klasse $\mathcal{C}^k$ ($\mathcal{C}^k - ZDS$)*, wenn $\varphi(t, \omega, \cdot) \in \mathcal{C}^k(X, X)$ für alle $t \in \mathbb{T}, \omega \in \Omega$ und

$$\frac{d^k}{dx^k}\varphi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T} \times X, X)$$

für alle $\omega \in \Omega$.

Unter Umständen ist es möglich, dass ein ZDS abhängig von ω und dem Anfangswert x nicht auf ganz $\mathbb{T}$ definiert werden kann (oder soll), in so einem Fall verwenden wir folgende Definition:

Definition 1.5 (lokales ZDS). Sei $\mathbb{T} = \mathbb{R}$. Ein Paar (θ, φ) mit dem MDS $\theta : \mathbb{T} \times \Omega \to \Omega$ auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und der Abbildung

$$\varphi : D \to X,\ (t, \omega, x) \to \varphi(t, \omega, x)$$

der messbaren Menge $D \subset \mathbb{R} \times \Omega \times X$ in den metrischen Raum X heißt *lokales zufälliges dynamisches System der Klasse C^k (lokales C^k-ZDS)*, falls:

1. Der *zufällige Definitionsbereich* $D(\omega) := \{(t,x) \in \mathbb{R} \times X : (t,\omega,x) \in D\}$ ist offen und nicht-leer und $\varphi(\cdot,\omega,\cdot) \in \mathcal{C}^k(D(\omega), X)$ für alle $\omega \in \Omega$
2. $D(\omega,x) := \{t \in \mathbb{R} : (t,x) \in D(\omega)\}$ ist ein offenes Intervall

   $$(\tau^-(\omega,x), \tau^+(\omega,x)) := D(\omega,x) \text{ mit } \tau^- < 0 < \tau^+$$

   für alle $\omega \in \Omega, x \in X$
3. (lokaler Cozykel) Für alle $\omega \in \Omega, x \in X$ sowie $s \in D(\omega,x)$ gilt: $\varphi(0,\omega,\cdot) = \mathrm{id}$ und $s+t \in D(\omega,x)$ genau dann, wenn $t \in D(\theta(s)\omega, \varphi(s,\omega,x))$, und für diese s,t gilt:

   $$\varphi(s+t,\omega,x) = \varphi(t,\theta(s)\omega,\varphi(s,\omega,x)).$$

Ein lokales ZDS ist global, genügt also Definition (1.3), falls $D = \mathbb{R} \times \Omega \times X$.

1.2. Stochastische Attraktoren

Zur Definition der Attraktoren benötigen wir zunächst die allgemeinere Idee der invarianten Menge. Auch in der deterministischen Analysis bringt ein Attraktor mit sich, dass er unter dem Fluss des Systems invariant ist, die Dynamik den Attraktor also stets auf sich selbst abbildet.

Definition 1.6 (Zufällige invariante kompakte Menge). Gegeben seien ein ZDS (θ, φ) mit metrischem Zustandsraum X und $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ seine Metrik. Sei

$$d(x,A) := \inf_{y \in A} d(x,y)$$

der Abstand von $x \in X$ zu einer Menge $A \subseteq X$. Eine Familie von Mengen A_ω bzw. die Abbildung $A : \Omega \to \mathcal{P}(X), \omega \to A(\omega)$ heißt *zufällige invariante kompakte Menge* des ZDS (θ, φ) wenn:

1. $A(\omega) \subseteq X$ kompakt für alle $\omega \in \Omega$
2. $\omega \to d(x, A(\omega))$ messbar für alle $x \in X$.
3. $\varphi(t,\omega,A(\omega)) = A(\theta(t)\omega)$ für alle $\omega \in \Omega, t \in \mathbb{T}$.

In der Einführung hatten wir Attraktoren dadurch charakterisiert, das die Trajektorien eines dynamischen Systems irgendwie davon angezogen werden. Was damit genau gemeint ist, wollen wir jetzt durch die Einführung verschiedener Konvergenzbegriffe klären.

Definition 1.7 (Konvergenz). Sei $\mathbb{T} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ oder $\mathbb{T} = \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $X : \Omega \to \mathbb{X}$ sowie $X_t : \Omega \to \mathbb{X}, t \in \mathbb{T}$ Zufallsvariablen im vollständigen metrischen Raum $\mathbb{X}$ und $t_0 \in \mathbb{T}$.

Wir schreiben

1. (X_t) *konvergiert fast-sicher* gegen X ($\lim_{t\to t_0} X_t = X$ fast-sicher) mit t gegen t_0, falls
$$\mathbb{P}(\lim_{t\to t_0} X_t = X) = 1$$
gilt.

2. (X_t) *konvergiert in Wahrscheinlichkeit* gegen X ($X_t \to X$ in Wahrscheinlichkeit) mit t gegen t_0, falls für alle $\varepsilon > 0$ gilt:
$$\lim_{t\to t_0} \mathbb{P}(|X_t - X| \geq \varepsilon) = 0.$$

Damit können wir jetzt die zentrale Definition angeben:

Definition 1.8 (Stochastische Attraktoren). Sei $\mathcal{A}(\cdot)$ eine zufällige invariante kompakte Menge zum ZDS (θ, φ). Dann heißt $\mathcal{A}$

1. *Forward-Attraktor*, wenn $\lim_{t\to\infty} \sup_{x\in B} d(\varphi(t, \omega, x), \mathcal{A}(\theta(t)\omega)) = 0$ fast-sicher

2. *Pullback-Attraktor*, wenn $\lim_{t\to\infty} \sup_{x\in B} d(\varphi(t, \theta(-t)\omega, x), \mathcal{A}(\omega)) = 0$ fast-sicher für ein ZDS mit zweiseitigem MDS über $\mathbb{T} = \mathbb{R}$

3. *schwacher Attraktor*, wenn $\sup_{x\in B} d(\varphi(t, \omega, x), \mathcal{A}(\theta(t)\omega) \to 0$ in Wahrscheinlichkeit mit $t \to \infty$

für alle beschränkten Untermengen $B \subset X$ gilt.

Attraktoren mit fast-sicherer Konvergenz nennen wir *starke Attraktoren*, um den Gegensatz zum schwachen Attraktor herauszustellen.

Diese Attraktoren nennt man auch *Set-* oder *Mengen-Attraktoren*, da die angezogenen Objekte alle deterministischen, kompakten Teilmengen des Zustandsraumes sind.

Anmerkung 1.9. Allgemeiner kann man als einschränkende Obermenge ein *Universum*, einen Raum zufälliger, abgeschlossener Mengen
$$\mathcal{D} = \{D(\omega) \subset X \text{ abgeschlossen} \mid \omega \in \Omega\}$$
definieren. Die entsprechenden *(Pullback-, Forward-, schwache) $\mathcal{D}$-Attraktoren* genügen Definition (1.8), nur dass nun für die angezogenen Mengen B gilt: $B \in \mathcal{D}$. Folgende

deterministische Universen und die zugehörigen Attraktionsbegriffe sind von besonderem Interesse:

- $\mathcal{D} = \{D, D \subset Y \subset X,\ D \text{ kompakt}\}$, ein *lokaler Attraktor* mit *Attraktionsgebiet* Y.
- $\mathcal{D} = \{D, D \subset X,\ D \text{ beschränkt}\}$ der *globale Attraktor beschränkter Untermengen*, entsprechend unserer ursprünglichen Definition (1.8)
- $\mathcal{D} = \{\{x\}, x \in X\}$ der *globale Punkt-Attraktor*.

Einen ausführlichen Vergleich zwischen Punkt- und Mengenattraktoren findet man in [Cra01].

Ein Beispiel für ein nicht-deterministisches Universum ist

$$\mathcal{D} = \left\{ (D_\omega)_{\omega\in\Omega}, \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln d(x, D) = 0 \text{ für alle } x \in X \right\},$$

das Universum der *temperierten* zufälligen Mengen, die entsprechenden Zufallsvariablen- oder zufällige-Mengen-anziehenden $\mathcal{D}$-Attraktoren wurden von Gunter Ochs in [Och99] eingeführt und untersucht.

Korollar 1.10. *Ist $\mathcal{A}$ Forward- oder Pullback-Attraktor, so ist $\mathcal{A}$ auch ein schwacher Attraktor.*

Beweis. Die fast-sichere Konvergenz hat die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit zur Folge, siehe z.B. [IW81, S.8].

1. (Forward-Attraktor) die Forward-Attraktion

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{x\in B} d(\varphi(t,\omega,x), \mathcal{A}(\theta(t)\omega)) = 0 \text{ fast-sicher}$$

bedingt

$$\sup_{x\in B} d(\varphi(t,\omega,x), \mathcal{A}(\theta(t)\omega) \to 0 \text{ für } t \to \infty \text{ in Wahrscheinlichkeit.}$$

2. (Pullback-Attraktor) Analog bedingt Pullback-Attraktion

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{x\in B} d(\varphi(t,\omega,x), \mathcal{A}(\theta(t)\omega) \to 0 \text{ in Wahrscheinlichkeit.}$$

Da $\mathbb{P}$ bezüglich $\theta(t)$ invariant ist ($\theta(t)\mathbb{P} = \mathbb{P}$ für alle t), gilt mit Ersetzung von ω durch

$\theta(t)\omega$: Für alle ε-Umgebungen von Null $U_\varepsilon(0), \varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\left(\sup_{x\in B} d(\varphi(t, \theta(-t)\omega, x), \mathcal{A}(\omega) \in U_\varepsilon(0))\right) \\ &= \lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\left(\sup_{x\in B} d(\varphi(t, \omega, x), \mathcal{A}(\theta(t)\omega) \in U_\varepsilon(0))\right) \end{aligned}$$

da $\theta(-t)\theta(t) = \theta(t-t) = \theta(0) = \mathrm{id}_\Omega$, q.e.d.

Proposition 1.11 (Eindeutigkeit des Attraktors). *Der (globale) Pullback-, Forward- oder schwache Attraktor ist eindeutig bis auf Nullmengen.*

Beweis. Diese Proposition wird nicht allgemeingültig bewiesen. Wir zeigen die Eindeutigkeit nur für Attraktoren, die auch alle zufälligen beschränkten Mengen anziehen, also $\mathcal{D}$-Attraktoren mit $\mathcal{D} = \{(D(\omega))_{\omega\in\Omega}, D(\omega) \subset X,\ D(\omega)$ beschränkt für alle $\omega \in \Omega\}$. Für diese Attraktoren ist der Beweis nahezu trivial:

Nach Korollar (1.10) genügt es, die Eindeutigkeit für den schwachen Attraktor zu beweisen. Jeder Attraktor ist nach Definition eine zufällige invariante kompakte Menge. Wir zeigen nun: Jede zufällige invariante kompakte Menge ist im Attraktor enthalten, damit sind im besonderen alle Attraktoren wechselseitig in sich enthalten und somit gleich. Sei $\mathcal{A}$ ein schwacher Attraktor und $E \subset X$ eine zufällige invariante kompakte Menge. Dann gilt nach Definition: $\varphi(t, \omega, E(\omega)) = E(\theta(t)\omega)$ und damit für beliebiges $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}(d(E \circ \theta, \mathcal{A}) < \varepsilon) = \mathbb{P}(d(\varphi(t, \cdot, E), \mathcal{A}) < \varepsilon) \to 0$$

mit $t \to \infty$, weil $\mathcal{A}$ ein schwacher Attraktor ist. Da E von t unabhängig ist und $\mathbb{P}$ $\theta(t)$-invariant, folgt

$$\mathbb{P}(d(E, \mathcal{A}) < \varepsilon) = 1 - \mathbb{P}(d(E, \mathcal{A}) \geq \varepsilon) = 1 - \mathbb{P}(d(E \circ \theta, \mathcal{A}) \geq \varepsilon) = 1$$

q.e.d.

Die Eindeutigkeit für unsere betrachteten schwachen Attraktoren deterministischer Mengen nach Definition (1.8) ist damit leider nicht gegeben, und bleibt eine Vermutung. Für den Pullback-Attraktor deterministischer Mengen wurde die Eindeutigkeit jedoch schon von Hans Crauel in seiner Arbeit [Cra99] beweisen.

Allerdings gilt unser obiger Beweis für alle invarianten Mengen, die im Universum des Attraktors liegen. Daher ist ein determinstischer Attraktor $\mathcal{A}(\omega) \equiv \mathcal{A}$ über dem Universum $\mathcal{D} = \{D, D \subset X,\ D$ beschränkt$\}$ eindeutig:

Korollar 1.12 (aus dem Beweis zu Proposition (1.11)). *Der deterministische Pullback-, Forward- oder schwache Attraktor $\mathcal{A}(\omega) = \mathcal{A}$ für alle $\omega \in \Omega$ ist eindeutig bis auf Nullmengen.*

2. Zufällige Dynamische Systeme und Stochastische Differentialgleichungen

Die stochastische Analysis untersucht Systeme, die unter dem Einfluss von einem Rauschen stehen, das als *Wienerprozess* modelliert wird. Das Kalkül der Stochastischen Analysis, vor allem der *Stochastischen Differentialgleichungen (SDGl'en)*, hat weit reichende Ergebnisse hervorgebracht. Daher ist es sinnvoll festzustellen, dass die Lösung der SDGl'en unter geeigneten Voraussetzungen zufällige dynamische Systeme erzeugt, und die zu den SDGl'en gehörende Klasse von ZDS zu untersuchen. Unsere späteren Beispiele für Attraktoren können wir dann mit SDGl'en beschreiben, und vielfältige Werkzeuge, insbesondere die ebenfalls als Lösungen von SDGl'en erzeugbaren *Diffusionsprozesse*, zu ihrer Untersuchung benutzen.

Wir betrachten im folgenden die Stratonovich-SDGl (zur Transformation zwischen Itô- und Stratonovich-Darstellung siehe Anhang, Lemma (A.1)):

$$dx = b(x)dt + \sigma(x) \circ dW_t$$

mit $X \subseteq \mathbb{R}, X \to \mathbb{R}$, $\sigma : X \to \mathbb{R}$ und untersuchen, wann und wie sich ein ZDS (θ, φ) dazu konstruieren lässt. Zunächst definieren wir, wie dieser Zusammenhang aussehen soll:

Definition 2.1 (erzeugtes ZDS). Wir schreiben die SDGl $dx = b(x)dt + \sigma(x) \circ dW_t$ *erzeugt* oder *induziert* das (lokale) ZDS (θ, φ) über X, falls der Cozykel φ eine Lösung der SDGl zum Anfangswert $x(0) = x$ ist:

$$d\varphi(t, \cdot, x) = b(\varphi(t, \cdot, x))dt + \sigma(\varphi(t, \cdot, x)) \circ dW_t(\cdot) \text{ fast-sicher}$$

für alle $t \in T, x \in X$ bzw. $(t, x) \in D(\omega)$ im Falle des lokalen ZDS. Die Anfangswert-Bedingung $\varphi(t, \cdot, x) = x$ fast-sicher ist für einen Cozykel stets erfüllt.

2.1. Die Konstruktion des ZDS

Zunächst konstruieren wir getreu der Definition des ZDS das Wiener-MDS $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \theta)$, wie wir es bereits in Beispiel (1.2) getan haben: Wähle

1. $\Omega := \{\omega \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \omega(0) = 0\}$ als Menge aller stetigen, im Ursprung verschwindenden Funktionen,

2. $\mathcal{F}$ als Borel-σ-Algebra über einer geeigneten Topologie und

3. $\mathbb{P}$ als das *Wiener-Maß*, so dass $\omega(t) - \omega(s) \sim \mathcal{N}(0, |t - s|)$, $s, t \in \mathbb{R}$ wobei $\mathcal{N}$ die $\mathbb{R}^1$-Normalverteilung bezeichnet, sowie

4. θ als den $\mathbb{P}$-erhaltenden Shift-Operator $\theta_t : \Omega \to \Omega$, $\theta_t\omega(s) := (\omega(t+s) - \omega(t))$.

Diese Konstruktion bildet ein MDS wie im Beispiel (1.2) gezeigt.

Nachdem wir eine Möglichkeit gefunden haben, den Wienerprozess als MDS auszudrücken, gilt es festzustellen, ob die Lösung der Stratonovich-SDGl

$$dx = b(x)dt + \sigma(x) \circ dW_t$$

tatsächlich einen Cozykel über dem Wiener-MDS bildet. Zunächst spezifizieren wir die SDGl genauer.

Definition 2.2. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *lokal δ-Hölder-stetig*, wenn es für jede kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}$ eine Konstante $c_{K,\delta}$ gibt, so dass gilt:

$$|f(x) - f(y)| \leq c_{K,\delta}|x - y|^\delta$$

für alle $x, y \in K$. f heißt *lokal Lipschitz-stetig*, wenn f lokal 1-Hölder-stetig ist.

Wir bezeichnen mit $\mathcal{C}^{k,\delta}$ den Raum der k-mal lokal δ-Hölder-stetig differenzierbaren Funktionen über $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{C}^{k,\delta} = \{f \in \mathcal{C}^k, f^{(k)} \text{ ist lokal } \delta\text{-Hölder-stetig}\}$$

Setzen wir $\delta = 1$, so erhalten wir den Raum $\mathcal{C}^{k,1}$ der k-mal lokal Lipschitz-stetig differenzierbaren Funktionen. Die Konstruktion des Cozykels lässt sich für SDGl'en mit $b, \sigma \in \mathcal{C}^{k,\delta}$ für hinreichende k, δ durchführen, jedoch erhält man im allgemeinen nur einen *lokalen Cozykel*, da die starke Lösung der SDGl nur bis zu einer zufälligen Explosionszeit $\tau(\omega, x)$, bzw. bei zweiseitiger Zeit auf einem Intervall $(\tau_-(\omega, x), \tau_+(\omega, x))$ existieren muss.

Theorem 2.3 (Existenz der starken Lösung). *Sei $(W_t)_{t\in\mathbb{R}}$ ein Wienerprozess über dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $b \in \mathcal{C}^{k,1}$ und $\sigma \in \mathcal{C}^{k+1,\frac{1}{2}}$ und $s < t \in \mathbb{T} \subset \mathbb{R}$ mit $k \geq 1$. Dann besitzt die Stratonovich-SDGl*

$$dx = b(x)dt + \sigma(x) \circ dW_t$$

die eindeutige starke Lösung

$$\phi_{s,t}(x) = \int_s^t b(\phi_{s,u}(x))du + \int_s^t \sigma(\phi_{s,\cdot}(x)) \circ dW_t$$

mit dem Anfangswert $\phi_{s,s}(x) = x$ bis zu einer Explosionszeit $t < \tau(\omega, x)$.

Einen Beweis dieser grundlegenden Aussage findet man in vielen Büchern über SDGl'en, z.B. [KS91, Theorem 5.2.5 S.287ff.]).

Es stellt sich heraus, dass eine Version dieser Lösung tatsächlich ein Cozykel über unserem MDS ist, d.h. $\varphi(t,\cdot,x) = \phi_{0,t}(x)$ bis auf Nullmengen. Dies spezifizieren wir genauer im folgenden Theorem:

Theorem 2.4 (ZDS zu einer SDGl). *Sei*

$$dx = b(x)dt + \sigma(x) \circ dW_t$$

eine Stratonovich-SDGl auf $X = \mathbb{R}$ *mit* $t \in \mathbb{T} = \mathbb{R}$. $b \in \mathcal{C}^{k,\delta}$ *und* $\sigma \in \mathcal{C}^{k+1,\delta}$, $\sigma(x) > 0$ *für alle* $x \in X$. *Dann erzeugt die SDGl ein lokales* $\mathcal{C}^k$*-ZDS. Das erzeugte ZDS ist global genau dann, wenn* $K^+(\pm\infty) = \infty$ *und* $K^-(\pm\infty) = \infty$ *mit*

$$K^+(x) = \int_0^x \frac{1}{\sigma(y)} \exp(-\int_0^y \frac{2b}{\sigma^2}dz) \left(\int_0^y \frac{1}{\sigma(z)} \exp(\int_0^z \frac{2b}{\sigma^2}du)dz \right) dy$$

sowie

$$K^-(x) = \int_0^x \frac{1}{\sigma(y)} \exp(\int_0^y \frac{2b}{\sigma^2}dz) \left(\int_0^y \frac{1}{\sigma(z)} \exp(-\int_0^z \frac{2b}{\sigma^2}du)dz \right) dy.$$

Der Beweis ist langwierig, und wird daher hier nur zusammengefasst. Eine Konstruktion findet sich in [Arn98, Abschnitt 2.3.4, S82ff.] welche häufig auf [Kun90] verweist. Er teilt sich in folgende wichtige Schritte:

1. (Existenz und Eindeutigkeit der Lösung) Die starke Lösung $\phi_{s,t}(x)$ geht aus Theorem (2.3) hervor.

2. (Fluss-Eigenschaft) Es existiert eine Version von ϕ, die den Flusseigenschaften

   a) $\phi_{s,s} = \mathrm{id}_X$ und

   b) $\phi_{s,t} = \phi_{u,t} \circ \phi_{s,u}$

   genügt, siehe [Kun90, S. 161].

3. (grober Cozykel) Die Lösung ist ein *sehr grober Cozykel*, d.h. $\phi_{s,s+t}(\omega) = \phi_{0,t}(\theta_s\omega)$ für alle $s,t \in \mathbb{R}$, aber nur alle $\omega \in \Omega \backslash N_{s,t}$, wobei die Ausnahmenmenge $N_{s,t}$ eine Nullmenge ist: $\mathbb{P}(N_{s,t}) = 0$ ([Arn98, S.84ff.]). Unter Benutzung der Stetigkeit von $\phi_{s,t}$ in t erhält man das Resultat, dass ϕ nur ein *grober Cozykel* ist, d.h. die Ausnahmenmenge $N_{s,t} = N_s$ ist nur noch von s abhängig. Wir schreiben nun:

   $$\varphi(t,\omega) := \phi_{0,t}(\omega).$$

4. (Perfektion des Cozykels) Zum groben Cozykel $\varphi(t, \omega)$ existiert eine Version, die ein perfekter (d.h. nicht grober) Cozykel ist. Hierzu verwendet man die Tatsache dass φ ein $\mathcal{C}^k$-Diffeomorphismus ist und die Gruppe dieser Diffeomorphismen eine abzählbare Basis hat. [Arn98, Theorem 1.3.2, S.17ff.] liefert dann die Existenz einer perfekten Version von φ.

5. (Globale Existenz) Die Bedingungen $K^+(\pm\infty) = \infty$ und $K^-(\pm\infty) = \infty$ liefern eine Regularitätsbedingung auf $[-\infty, \infty]$, die eine Explosion der Lösung ausschließen. Die Funktionen K^+, K^- nennt man *Fellers Explosionsfunktionen*. Diese Bedingungen sind hinreichend für eine globale Existenz der Lösung, wie wir im folgenden Kapitel noch zeigen werden.

2.2. Diffusionen

Eine stochastische Differentialgleichung erzeugt unter hinreichenden Bedingungen als Lösung nicht nur einen Cozykel, sondern auch eine *Diffusion*. Eine Diffusion ist die Beschreibung der stetigen stochastischen Bewegung eines Partikels ohne „Erinnerungsvermögen“. Letztere Eigenschaft wird präzise als *Markov-Eigenschaft* beschrieben. Wir wollen diese weitere Klasse stochastischer Prozesse einführen, weil wir aus ihrer ergiebigen Theorie letztendlich die Bedingungen für das Auftreten unserer Attraktoren schöpfen können.

Zur exakten Beschreibung der Diffusion sind jedoch zunächst einige detaillierte Definitionen nötig:

Definition 2.5 (Familie von Sub-Markov-Kernen). Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $\mathcal{B}(I)$ die zugehörige Borel-σ-Algebra. Die Abbildung

$$P : \mathbb{R}^+ \times I \times \mathcal{B}(I) \to \mathbb{R}^+,\ (t, x, B) \to P_t(x, B)$$

nennt sich *Familie von Sub-Markov-Kernen*, wenn für alle $t \in \mathbb{R}^+$ gilt:

1. $B \to P_t(x, B)$ ist σ-additiv für alle $x \in \mathbb{R}$ und $P_t(x, I) \leq 1$.

2. $x \to P_t(x, B)$ ist $(\mathcal{B}(I) \to \mathcal{B}(R^+))$-messbar und erfüllt die Gleichung von Chapman-Kolmogorov:

$$P_{s+t}(x, B) = \int_I P_s(y, B) P_t(x, dy) \text{ für alle } s, t \in \mathbb{R}^+$$

Die zugehörige Operator-Familie $(T_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ ist wie folgt definiert:

$$T : \mathbb{R}^+ \times C_0(I) \to C_0(I),\ T_t f(x) := \int_I f(x) P_t(x, dy)$$

und bildet eine Halbgruppe $(T., \circ)$ mit der Verkettung $\circ : (T_s \circ T_t)f = T_s(T_t f) = T_{s+t}f$ und neutralem Element $T_0 = \mathrm{id}$, falls $P_0(x, B) = \delta_x(B)$ mit dem Dirac-Maß

$$\delta_x(B) := \begin{cases} 1, & x \in B \\ 0, & x \notin B \end{cases}.$$

Mit einigen zusätzlichen Einschränkungen der Operator-Familie erhält man die Feller-Dynkin-Familien:

Definition 2.6 (Diffusion). Bezeichne $\mathcal{C}_0(I)$ den Raum der stetigen auf dem Rand von I verschwindenden Funktionen. Eine Familie von Sub-Markov-Kernen heißt *Feller-Dynkin-Familie*, wenn die zugeordnete Operator-Familie $(T_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ folgenden Bedingungen genügt:

1. $T_t f \in \mathcal{C}_0(I)$ für alle $t \in \mathbb{R}^+$ und $T_0 = \mathrm{id}$
2. $\lim_{t\to 0} T_t f = f$ punktweise für alle $f \in \mathcal{C}_0(I)$.

$(T_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ ist dann eine Halbgruppe bezüglich $\circ$, wir nennen sie *Diffusion*, und es gilt $P_0(x, B) = \delta_x(B)$, da $T_0 f = \int_I f(y)P(\cdot, dy) = f$.

Nun haben wir alle Voraussetzungen um den Diffusionsprozess zu definieren:

Definition 2.7 (Diffusionsprozess). Sei $I \in \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $(P_t)_{t\in R^+}$ eine Feller-Dynkin-Familie. Die $P.$ vermittels der Übergangswahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(X_{t,x} \in B) = P_t(x, B)$ zugeordnete Familie von Markov-Prozessen $(X_{t,x})_{t\in\mathbb{R}^+, x\in I}$, $X_{t,x} \in I$ mit $X_{0,x} = x$ $\mathbb{P}$-fast-sicher heißt *Diffusionsprozess*. Wir schreiben $\varphi(t, \omega, x) := X_{t,x}(\omega)$.

Es gilt: $(T_t f)(x) = \mathbb{E}(f(\varphi(t, \cdot, x)))$.

Die Forderung der Sub-Markov-Eigenschaft $P_t(x, I) \leq 1$ erlaubt dem Prozess, auf eingeschränkten Zeiten zu existieren. Wenn wir jedoch eine Existenz auf ganz $\mathbb{T}$ benötigen, so benutzen wir folgende Definition:

Definition 2.8. Einen Diffusionsprozess nennen wir *vollständig*, falls $P_t(x, I) = 1$ für alle $x \in X, t \in \mathbb{T}$ gilt.

Für viele Untersuchungen genügt es, die Wirkung der Diffusion in einem infinitesimalen Zeitschritt zu betrachten, dazu betrachten wir die Operatorableitung von T_t an an der Stelle $t = 0$. Da nach Definition (2.6) bereits $T_0 f = f$ gilt, erhalten wir folgende Definition:

Definition 2.9. Der lineare Operator L gegeben durch

$$(Lf)(x) = \lim_{t \to 0} \frac{T_t f(x) - f(x)}{t}$$

heißt *(infinitesimaler) Generator* der Diffusion T_t.

Der Generator L einer Diffusion T_t erfüllt die *Kolmogorov'sche Vorwärtsgleichung* bzw. die *Kolmogorov'sche Rückwärtsgleichung*

$$\frac{d}{dt} T_t = L T_t \text{ bzw. } \frac{d}{dt} T_t = T_t L$$

und genügt unter Einschränkungen der *Operatorexponentialfunktion* $T_t = e^{Lt}$, wobei

$$e^{Lt} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} L^k \text{ mit } L^k = \underbrace{L \circ L \circ \cdots \circ L}_{\#\text{k mal}}$$

soweit L^k definiert ist und die Reihe absolut konvergiert.

Zudem definieren wir:

Definition 2.10. Ein Diffusionsprozess φ heißt *regulär* im Punkt x, wenn für die Stoppzeiten

$$\tau_x^l = \inf\{t > 0 : \varphi(t, \cdot, x) < x\} \text{ und } \tau_x^r = \inf\{t > 0 : \varphi(t, \cdot, x) > x\}$$

gilt: $\tau_x^l = \tau_x^r = 0$ fast-sicher, sonst *singulär* im Punkt x. Der Prozess heißt *regulär* auf dem Intervall I, wenn er regulär für alle $x \in I$ ist.

Bevor wir uns die Hilfsmittel des Diffusions-Kalküls zu Nutze machen, müssen wir zeigen, dass unsere SDGl in der Tat einen Diffusionsprozess erzeugt. Erinnern wir uns an die SDGl:

$$dx = b(x)dt + \sigma(x) \circ dW_t \tag{1}$$

mit $b \in \mathcal{C}^{1,1}$ und $\sigma \in \mathcal{C}^{2,\frac{1}{2}}$. Die starke Lösung $\varphi(t, \omega, x)$ existiere für alle $\omega \in \Omega$, $x \in I$ jeweils auf $t \in [0, \tau_i(\omega, x))$ eindeutig mit der zufälligen Stoppzeit τ (die Bedingungen dazu haben wir bereits in Theorem (2.3) betrachtet). Dann ist $P_t(x, B) := \mathbb{P}\{\omega \in \Omega, \varphi(t, \omega, x) \in B\}$ mit $B \in \mathcal{B}(I)$ eine Feller-Dynkin-Halbgruppe und die Lösung damit ein Diffusions-Prozess, siehe [IW81, Theorem 6.1 S.201ff.]. Der Generator $L : \mathcal{C}_0^2 \to \mathcal{C}_0^2$ zu P_t ist gegeben durch

$$Lf = \frac{1}{2}(b + \frac{1}{2}\sigma\sigma')f' + \sigma^2 f''.$$

Außerdem erhalten wir einen direkten Zusammenhang zwischen der Regularität und der erzeugenden SDGl:

Lemma 2.11. *(siehe [Ste01, Prop. 1.2.6 S.25]) Der die SDGl (1) lösende Diffusionsprozess φ ist singulär im Punkt $x \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn $\sigma(x) = 0$. φ ist regulär auf dem offenen Intervall I genau dann, wenn $\sigma(x) \neq 0$ für alle $x \in I$.*

2.3. Stationäre Maße

Um Aussagen über das Langzeit-Verhalten des aus der SDGl erzeugten ZDS zu machen, untersuchen wir *stationäre Maße* des zugeordneten Diffusionsprozesses. Als besonders nützlich wird sich dabei das *Geschwindigkeits-Maß* erweisen, mit dem wir konkrete Bedingungen zur Konvergenz formulieren können. Tatsächlich gibt es zwei verschiedene relevante Stationaritäts-Begriffe für ein Maß, die *Stationarität bezüglich der Halbgruppe* und *die Stationarität bezüglich des Generators*, die für das Geschwindigkeitsmaß aber beide erfüllt werden. Wir werden zunächst beide Begriffe einführen.

Sei L^* der zu L *adjungierte Operator* gemäß

$$\int f dL^* v = \int L f dv \text{ für alle } f \in C_0(I).$$

Definition 2.12. Ein σ-endliches Maß $v : \mathcal{B}(I) \to \mathbb{R}^+$ heißt *stationär bezüglich des Generators* des Diffusionsprozesses φ, wenn es die *Fokker-Planck-Gleichung* $L^* v = 0$ erfüllt.

Definition 2.13. Der Diffusionsprozess φ sei vollständig auf dem offenen Intervall I, d.h. $P_t(x, I) = \mathbb{P}(\varphi(t, \cdot, x) \in I) = 1$ für alle $x \in I, t \in \mathbb{R}^+$. Dann heißt das σ-endliche Maß $v : \mathcal{B}(I) \to \mathbb{R}^+$ *stationär bezüglich der Halbgruppe* des Diffusionsprozesses φ, wenn gilt:

$$T_t v = v \text{ wobei } T_t v(f) = \int_I T_t f dv.$$

Nun wollen wir so ein invariantes Maß betrachten: Das *Geschwindigkeits-Maß* für eine stochastische Differentialgleichung.

Definition 2.14 (Geschwindigkeitsmaß). Sei $c \in I$. Die nicht-negative Funktion

$$p(x) := \frac{2}{|\sigma(x)|} \exp\left(2 \int_c^x \frac{b(y)}{\sigma^2(y)} dy\right)$$

sei die Dichte des Maßes $m : \mathcal{B}(I) \to \mathbb{R}^+$ bezüglich des Lebesgue-Maßes λ:

$$m(A) = \int_A p d\lambda$$

Dann nennt man m das *(Vorwärts-)Geschwindigkeits-Maß* des als Lösung von der SDGl (1) induzierten Diffusionsprozesses.

Obwohl die Dichte des Geschwindigkeitsmaßes $p = p_c(x)$ von der Konstanten c abhängig ist, interessiert die Wahl von c uns nicht weiter, da sie für das Verhalten im Unendlichen irrelevant ist, denn es gilt für Konstanten $c, c' \in I$:

$$\begin{aligned}
p_{c'}(x) &= \frac{2}{|\sigma(x)|} \exp\left(2 \int_{c'}^{x} \frac{b(y)}{\sigma^2(y)} dy\right) \\
&= \frac{2}{|\sigma(x)|} \exp\left(2 \int_{c'}^{c} \frac{b(y)}{\sigma^2(y)} dy + \int_{c}^{x} \frac{b(y)}{\sigma^2(y)} dy\right) \\
&= \exp\left(2 \int_{c'}^{c} \frac{b(y)}{\sigma^2(y)} dy\right) p_c(x) \\
&= d(c, c') p_c(x)
\end{aligned}$$

mit $d(c, c')$ konstant.

Wir erwarten nun, dass das Geschwindigkeitsmaß unsere Begriffe der Stationarität erfüllt.

Lemma 2.15. *Das Geschwindigkeitsmaß ist stationär bezüglich der Halbgruppe des Diffusionsprozesses φ induziert durch (1), wenn die Halbgruppe die echte Markov-Eigenschaft hat, d.h. $P_t(x, I) = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}$.*

Für den Beweis siehe z.B. [Ste01, S.26ff.].

Lemma 2.16. *Das Geschwindigkeitsmaß ist stationär bezüglich dem Generator L des Diffusionsprozesses φ induziert durch (1).*

Beweis. Der infinitesimale Generator, definiert durch $L = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(T_t - \mathrm{id})$, berechnet sich für unsere SDGl durch

$$Lf = \frac{1}{2}(b + \frac{1}{2}\sigma\sigma')f' + \sigma^2 f''.$$

Sei $f \in C_0^2$ eine Funktion mit kompaktem Träger und bezeichne μ das Lebesgue-Maß, dann ist zu zeigen: $L^*m(f) = \int_I Lfp\,d\mu = 0$ (Fokker-Planck-Gleichung). Für p gilt:

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{2}{|\sigma(x)|}\exp\left(2\int_c^x \frac{b(y)}{\sigma^2(y)}dy\right) \\ &= \frac{2}{|\sigma(x)|}\exp\left(2\int_c^x (\frac{b(y)+\frac{1}{2}\sigma(y)\sigma'(y)}{\sigma^2(y)} - \ln|\sigma(y)|)dy\right) \\ &= \frac{2}{\sigma^2(x)}\exp\left(2\int_c^x \frac{b(y)+\frac{1}{2}\sigma\sigma'(y)}{\sigma^2(y)}dy\right). \end{aligned}$$

Nun erhalten wir mit $h(x) := \exp(2\int_c^x \frac{b+\frac{1}{2}\sigma\sigma'}{\sigma^2}d\mu)$:

$$\begin{aligned} \int_I (Lf)pd\mu &= \int_I \left(\frac{1}{2}\sigma^2 f'' + (b+\frac{1}{2}\sigma\sigma')f'\right)p\,d\mu \\ &= \int_I f''h\,d\mu + \int_I 2\frac{b+\frac{1}{2}\sigma\sigma'}{\sigma^2}hf'\,d\mu \\ &= \int_I f''h\,d\mu + \int_I h'f'\,d\mu \\ &= \int_I f''h\,d\mu + hf'|_I - \int_I f''h\,d\mu = 0 \end{aligned}$$

durch partielle Integration, $f \in C_0^2(I) \Rightarrow f' \in C_0^1(\mathrm{I})$ und somit $hf'|_I = 0$. q.e.d.

Definition 2.17 (Rückwärts-Geschwindigkeitsmaß). Sei I ein reguläres Intervall für den durch die SDGl $dx = -b(x)dt + \sigma(x)\circ dW$ induzierten Diffusionsprozess $\overline{\varphi}$. Das Maß $\overline{m}$ mit der Dichte

$$\overline{p} = p_{(-b)} = \frac{2}{|\sigma(\cdot)|}\exp\left(-2\int_c^{\cdot}\frac{b(y)}{\sigma^2(y)}dy\right)$$

bezüglich des Lebesgue-Maßes, wobei $p_{(-b)}$ die Dichte des Geschwindigkeitsmaßes aus Definition (2.14) für die SDGl mit Drift $-b$ beschreibt, nennt sich *Rückwärts-Geschwindigkeitsmaß* des als Lösung von der SDGl (1) induzierten Diffusionsprozesses.

Definition 2.18 (Skalenfunktion). Die Funktion

$$s_c(x) = \int_c^x \overline{p}(v)dv = \int_c^x \frac{2}{|\sigma(v)|}\exp\left(-2\int_c^v \frac{b(y)}{\sigma^2(y)}dy\right)dv$$

nennt sich die *Skalenfunktion* des von der SDGl (1) induzierten Diffusionsprozesses.

Die Skalenfunktion hat folgende Eigenschaft: Der Prozess $s_c(X_t)$ ist ein *stetiges lo-*

kales Martingal (siehe Definition (A.8)) wenn X_t Lösungsprozess der SDGl ist. Martingalbegriffe werden uns im folgenden öfters begegnen, die nötigen Definitionen und Eigenschaften finden sich im Anhang unter (A.3).

Auf den Geschwindigkeitsmaßen und der Skalenfunktion aufbauend können wir nun eine Aussage über die globale Existenz des lösenden Diffusionsprozesses machen:

Theorem 2.19 (Fellers Test auf Explosion). *Zu einem aus der SDGl (1) erzeugten Diffusionsprozess über dem Intervall $I = (c_1, c_2)$ und beliebiger Konstante $c \in I$ definieren wir die folgenden* Feller-Explosionsfunktionen*:*

$$\begin{aligned} K(x) :&= \int_c^x \overline{p}(v)\overline{s}_c(v)dv \\ &= \int_c^x \frac{1}{\sigma(y)} \exp\left(-\int_c^y \frac{2b(z)}{\sigma^2(z)}dz\right) \left(\int_c^y \frac{1}{\sigma(z)} \exp\left(\int_c^z \frac{2b(u)}{\sigma^2(u)}du\right) dz\right) dy \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \overline{K}(x) :&= \int_c^x p(v)s_c(v)dv \\ &= \int_c^x \frac{1}{\sigma(y)} \exp\left(\int_c^y \frac{2b(z)}{\sigma^2(z)}dz\right) \left(\int_c^y \frac{1}{\sigma(z)} \exp\left(-\int_c^z \frac{2b(u)}{\sigma^2(u)}du\right) dz\right) dy \end{aligned}$$

mit $s_c, p, \overline{p}, \overline{s}_c$ Skalenfunktion bzw. Dichte des Vorwärts-, Rückwärtsgeschwindigkeitsmaßes sowie der Rückwärts-Skalenfunktion

$$\overline{s}_c(x) = \int_c^x p(v)dv = \int_c^x \frac{2}{|\sigma(x)|} \exp\left(2\int_c^v \frac{b(y)}{\sigma^2(y)}dy\right) dv$$

des Prozesses. Der zufällige Zeitpunkt $\tau_I^+(x,\omega) := \inf_{t>0}\{X_t \notin I\}$, zu dem der Prozess X_t das Intervall I verlässt, ist unendlich fast-sicher genau dann, wenn $K(c_i) = \infty, i = 1, 2$. Für einen Diffusionsprozess in zweiseitiger Zeit ist der zufällige Zeitpunkt des ersten Auftritts der Lösung $\tau_I^-(x,\omega) := \sup_{t<0}\{X_t \notin I\}$ unendlich fast-sicher genau dann, wenn $\overline{K}(c_i) = \infty, i = 1, 2$.

Beweis. Wir zeigen nur die für unseren Gebrauch wichtige Richtung „$\Leftarrow$“, also die hinreichende Bedingung für eine globale Lösung. Ein äquivalentes Theorem mit vollständigem Beweis findet sich in [IW81, VI.3. Theorem 3.2. S.365]. Wir verwenden folgendes Lemma:

Lemma 2.20. *Sei L der infinitesimale Generator eines die SDGl (1) lösenden Diffusionsprozesses über dem regulären Intervall I. Weiterhin sei u die eindeutig existierende Lösung des Fixpunktproblems*

$$Lu = u$$

mit den Randbedingungen $u(c) = 1$ und $u'(c) = 0$. Dann gilt mit $c \in I$ und der Feller-Explosionsfunktion $K(x)$ folgende Abschätzung:

$$K(x) + 1 \le u(x) \le \exp(K(x))$$

für alle $x \in I$.

Beweis dazu siehe [IW81, S.364].

Wir verwenden nun $u(\cdot)$ aus obigem Lemma. Sei τ der zufällige Zeitpunkt $\tau = \tau_{(a,b)} = \inf\{t \ge 0, X(t) \notin (a,b)\}$ an dem der Diffusionsprozess auf $I = (c_1, c_2)$ das Intervall $(a,b), c_1 < a < x < b < c_2$ verlässt.

Nun wenden wir die Itô-Formel, siehe Anhang (A.2), auf $e^{-t}u(X(t))$ an, und erhalten das *Martingal* (Definition siehe Anhang, A.6)

$$\begin{aligned} de^{-t}u(X(t)) &= e^{-t}\left(\frac{d}{dx}u\right)(X(t))\sigma(X(t))dW_t + e^{-t}(-u(X(t)) + (Lu)(X(t)))dt \\ &= e^{-t}\left(\frac{d}{dx}u\right)(X(t))\sigma(X(t))dW_t \end{aligned}$$

da $Lu = u$. Unter der Verwendung der Stoppzeit τ erzeugen wir den gestoppten Prozess $e^{-\min(t,\tau)}u(X(\min(t,\tau)))$, der nach [RY99, II, Proposition 1.3 S.52] ebenfalls ein Martingal ist.

Mit $a \searrow c_1$ und $b \nearrow c_2$ erhalten wir $\tau \to \tau_I$ mit der Stoppzeit $\tau_I = \min\{t, X(t) \notin I\}$ und das nicht-negative Supermartingal

$$Y_t := e^{-\min(t,\tau_I)}u(X(\min(t,\tau_I))).$$

Sei nun nach Voraussetzung $K(c_1) = K(c_2) = \infty$. Dann erhalten wir aus Lemma (2.20) $\lim_{x\searrow c_1} u(x) = \lim_{x\nearrow c_2} = \infty$. Da Y_t als nicht-negatives Supermartingal fast-sicher beschränkt ist (siehe z.B. [RY99, II, Korollar 2.11 S.65]), gilt $\mathbb{P}_x(\tau < \infty) = 0$.

Analog erhalten wir aus $\overline{K}(c_1) = \overline{K}(c_2) = \infty$ und der Stoppzeit $\overline{\tau} = \sup\{t \le 0, X(t) \notin (a,b)\}$ die Aussage $P_x(\overline{\tau} > -\infty) = 0$, q.e.d.

3. Konvergenzaussagen

Nun kommen wir zum Nutzen des Ganzen: Einige Konvergenzaussagen für den Diffusionsprozess. Die hier ermittelten Aussagen übertragen wir später zur Anwendung auf den Cozykel, um die entsprechenden Bedingungen für die verschiedenen Attraktoren zu erhalten. Der Einfachheit halber beschränken wir uns hier auf ZDS über R^+, die das reguläre Intervall $(0, \infty)$ besitzen.

3.1. Konvergenz fast-sicher

Theorem 3.1 (Verhalten des Diffusionsprozesses für $t \to \infty$). *Sei φ der durch die SDGl (1) erzeugte Diffusionsprozess auf dem regulären Intervall $I = (0, \infty)$, s_1 seine Skalenfunktion. Folgende Eigenschaften gelten für alle $x \in I$:*

1. $\lim_{t\to\infty} \varphi(t, \omega, x) = 0$ *fast-sicher* $\Leftrightarrow s_1(0) > -\infty$ *und* $s_1(\infty) = \infty$.

2. $\lim_{t\to\infty} \varphi(t, \omega, x) = \infty$ *fast-sicher* $\Leftrightarrow s_1(0) = -\infty$ *und* $s_1(\infty) < \infty$.

Beweis. Sei $X_t = \varphi(t, \cdot, x)$ der Diffusionsprozess für ein beliebiges $x \in I$, L sein Generator. Es gilt $Ls_1 \equiv 0$ analog zu $L^*m = 0$, siehe Beweis zu (2.16).

Für $0 < a < x < b < \infty$ definieren wir die Stoppzeit $\tau := \tau_{a,b} = \inf\{t, X_t \notin [a, b]\}$. Mit Anwendung der Îto-Formel auf $s_1(X_{(min(t,\tau)})$ und $Ls_1 \equiv 0$ erhält man

$$s_1(X_{(min(t,\tau)}) - s_1(x) = \int_0^{min(t,\tau)} s_1'(X_s)\sigma(X_s)dW(s)$$

und damit $\mathbb{E}(s_1(X_{min(t,\tau)})) = s_1(x)$, $s_1(X_t)$ ist somit ein lokales Martingal. Mit $t \to \infty$ bekommen wir

$$s_1(x) = s_1(a)\mathbb{P}(X_\tau = a) + s_1(b)\mathbb{P}(X_\tau = b))$$

da wir zum Zeitpunkt τ eine der Grenzen von $[a, b]$ erreicht haben. Daher gilt außerdem $\mathbb{P}(X_\tau = a) + \mathbb{P}(X_\tau = b) = 1$ und wir erhalten:

$$\mathbb{P}(X_\tau = a) = \frac{s_1(b) - s(x)}{s_1(b) - s_1(a)}, \mathbb{P}(X_\tau = b) = \frac{s_1(x) - s(a)}{s_1(b) - s_1(a)}. \tag{2}$$

Nun zu *(1.)*,$\Leftarrow$: Die Annahme ist $s_1(0) > -\infty$ und $s_1(\infty) = \infty$. Dann gilt mit (2)

$$\mathbb{P}(\inf_t X_t \leq a) \geq \lim_{b\to\infty} \mathbb{P}(X_\tau = a) = 1.$$

Da $a < \infty$ beliebig war, folgt aber

$$\mathbb{P}(\inf_t X_t = 0) = 1. \tag{3}$$

Wir definieren nun das nicht-negative Martingal

$$M_{t;\tau} = s_1(X_{min(t,\tau)}) - s_1(0).$$

Für $a \searrow 0, b \nearrow \infty$ konvergiert $M_{t;\tau}$ gegen das nicht-negative Supermartingal $Y_t := s_1(X_t) - s_1(0)$; eine Konvergenzaussage für Submartingale (siehe z.B. [IW81](Kapitel I, Theorem 6.4)) sichert uns nun die Existenz des Grenzwertes $\lim_{t\to\infty} Y_t$ $\mathbb{P}$-fast-sicher. Somit existiert auch $\lim_{t\to\infty} X_t$ $\mathbb{P}$-fast-sicher. Damit und aus Gleichung (3) folgt die gewünschte Aussage.

Analog funktioniert der Schluss für *(2.)*„$\Leftarrow$“, hier sind die Annahmen $s_1(0) = -\infty$ und $s_1(\infty) < \infty$. Damit erhält man $\mathbb{P}(\sup_t X_t \geq b) \geq \lim_{a\to 0} \mathbb{P}(X_\tau = b) = 1$ und als entsprechendes Gegenstück zu (3) die Gleichung $\mathbb{P}(\sup_t X_t = \infty) = 1$ und damit die Aussage.

Die Richtung „$\Rightarrow$“ erhalten wir für *(1.)* und *(2.)* durch Ausschluss. Zu *(1.)*: Wir nehmen an, die Annahme $s_1(0) > -\infty$ und $s_1(\infty) = \infty$ gelte nicht, und somit gilt entweder

1. $s_1(0) > -\infty$ aber $s_1(\infty) < \infty$, dann folgt nach Gleichung (2)

$$\mathbb{P}(\inf_t X_t \leq a) \geq \lim_{b\to\infty} \mathbb{P}(X_\tau = a) = \frac{s_1(\infty) - s_1(x)}{s_1(\infty) - s_1(a)}$$

sowie

$$\mathbb{P}(\sup_t X_t \geq b) \geq \lim_{a\to 0} \mathbb{P}(X_\tau = b) = \frac{s_1(x) - s_1(0)}{s_1(b) - s_1(0)}$$

und damit analog zu obigem Beweis bei dem Grenzübergang $a \searrow 0, b \nearrow \infty$

$$\mathbb{P}(\lim_{t\to\infty} X_t = 0) = 1 - \mathbb{P}(\lim_{t\to\infty} X_t = \infty) = \frac{s_1(\infty) - s_1(x)}{s_1(\infty) - s_1(0)} \in (0,1), \tag{4}$$

oder

2. $s_1(\infty) = \infty$ aber $s_1(0) = -\infty$, dann gilt jedoch

$$\mathbb{P}(\inf_t X_t \leq a) \geq \lim_{b\to\infty} \mathbb{P}(X_\tau = a) = 1 \text{ sowie } \mathbb{P}(\sup_t X_t \geq b) \geq \lim_{a\to 0} \mathbb{P}(X_\tau = b) = 1$$

und damit

$$\liminf_{t\to\infty} \mathbb{P}(X_t = 0) = \limsup_{t\to\infty} \mathbb{P}(X_t = \infty) = 1$$

und somit existiert kein Grenzwert $\mathbb{P}$-fast-sicher oder

3. $s_1(0) = -\infty$ sowie $s_1(\infty) < \infty$, dies jedoch entspricht den Voraussetzungen von (3.1, *2.*) und damit gilt $\varphi(t, \cdot, x) \to \infty$ fast-sicher.

In jedem Fall liegt ein Widerspruch vor. Der ganze Beweis funktioniert analog für *(2.)*, q.e.d.

Weiterhin benötigen wir noch analoge Aussagen für das Verhalten des Diffusionsprozesses mit $t \to -\infty$. Dazu folgendes Lemma:

Lemma 3.2. *Der dem durch die SDGl (1) erzeugten Diffusionsprozess φ zugeordnete* Rückwärtsprozess $\overline{\varphi}$ *mit* $\overline{W}(t, \cdot) := W(-t, \cdot)$ *und* $\overline{\varphi}(t, \cdot, \cdot) = \varphi(-t, \cdot, \cdot)$ *erfüllt folgende SDGl:*

$$d\overline{x} = -b(\overline{x})dt + \sigma(\overline{x}) \circ d\overline{W}_t$$

mit Anfangswert $\overline{x}(0) = x$.

Beweis. Sei φ die Lösung der SDGl $dx = b(x)dt + \sigma(x)dW_t$ mit $x(0) \in I$ über dem Zeitintervall $t \in [0, \tau_I)$ wobei $\tau(\omega)$ die zufällige Zeit ist, an der die Lösung das Intervall $I = (-\infty, \infty)$ verlässt. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\overline{\varphi}(t, \cdot, x) =& \varphi(-t, \cdot, x) \\
=& x + \int_0^{-t} b(\varphi(s, \cdot, x))ds + \int_0^{-t} \sigma(\varphi(s, \cdot, x)) \circ dW_s \\
=& x + \int_0^{t} -b(\overline{\varphi}(s, \cdot, x))ds + \int_0^{t} \sigma(\overline{\varphi}(s, \cdot, x)) \circ dW_{-s}
\end{aligned}$$

und da W_t und $W_{-t} = \overline{W}_t$ unabhängig sind, erfüllt $\overline{\varphi}$ die SDGl $dx = -b(x)dt + \sigma(x) \circ dW_t$, q.e.d.

Theorem 3.3 (Rückwärts-Verhalten des Diffusionsprozesses mit $t \to \infty$). *Es gilt* $\lim_{t \to -\infty} \varphi(t, \omega, x) = \infty$ *fast-sicher genau dann, wenn*

$$m((0, 1]) = \infty \textit{ und } m([1, \infty)) < \infty.$$

Beweis. Nach (3.1 Fall 2) gilt: $\lim_{t \to \infty} \overline{\varphi}(t, \omega, x) = \infty \Leftrightarrow \overline{s}_1(0) = -\infty$ und $\overline{s}_1(\infty) < \infty$, mit $\overline{s}_1(0) = -\infty \Leftrightarrow m((0, 1]) = -\infty$ und $s_1(\infty) < \infty \Leftrightarrow m([1, \infty) < \infty)$ folgt die Behauptung.

3.2. Konvergenz in Wahrscheinlichkeit

Nachdem wir nun Bedingungen für die fast-sichere Konvergenz haben, ermitteln wir jetzt die Bedingungen für die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit. Wie wir sehen werden, sind die Bedingungen dieser beiden Konvergenzbegriffe nicht offensichtlich identisch, es ergibt sich eine kleine Lücke, die wir später anhand von Beispielen untersuchen werden.

Theorem 3.4 (Verhalten des Diffusionsprozesses für $t \to \infty$ in Wahrscheinlichkeit). *Sei φ der durch die SDGl (1) erzeugte Diffusionsprozess über dem regulären Intervall $I = (0, \infty)$, s_1 seine Skalenfunktion und m sein Geschwindigkeitsmaß. Es gilt für alle $x \in I$:*

1. *$t \to \infty : \varphi(t, \omega, x) \to 0$ in Wahrscheinlichkeit, so gilt $s_1(\infty) = \infty$ und eine der folgenden Beziehungen:*
   a) *$s_1(0) > -\infty$*
   b) *$s_1(0) = -\infty$ und $m((0, 1]) = \infty$*
2. *Gilt umgekehrt $s_1(\infty) = \infty$ und eine der folgenden Bedingungen*
   a) *$s_1(0) > -\infty$*
   b) *$s_1(0) = -\infty$ und $m((0, 1]) = \infty$ und $m([1, \infty)) < \infty$*

   so folgt daraus: $t \to \infty : \varphi(t, \omega, x) \to 0$ in Wahrscheinlichkeit.

Beweis. Sei $x \in I$ beliebig. Wir zeigen zunächst die notwendige Bedingung (1), $t \to \infty : \varphi(t, \omega, x) \to 0 \Rightarrow s_1(\infty) = \infty$. Wir nehmen an, $s_1(\infty)$ sei kleiner ∞. Dann gilt für die beiden Fälle $s_1(0) = -\infty$ bzw. $s_1(0) > -\infty$ die bekannten Aussagen aus dem Beweis zu Theorem (3.1), für $s_1(0) > -\infty$ gilt Gleichung (4):

$$\mathbb{P}(\lim_{t\to\infty} X_t = 0) = 1 - \mathbb{P}(\lim_{t\to\infty} X_t = \infty) = \frac{s_1(\infty) - s_1(x)}{s_1(\infty) - s_1(0)} \neq 1$$

durch unsere Annahme, für $s_1(0) = -\infty$ gilt wieder Fall (2) von Theorem (3.1) und somit $\varphi(t, \omega, x) \to 0$ fast-sicher, ein Widerspruch. Daher muss $s_1(\infty) = \infty$ gelten.

Nun zu den Aussagen über $s_1(0)$. Konvergiert φ fast-sicher, so gilt $s_1(0) > -\infty$. Andernfalls ist $s_1(0) = -\infty$, so nehmen wir an, es sei $m((0, 1]) < \infty$. Dann können wir einen Spezialfall des *Ergodentheorems für additive Funktionale* (siehe z.B. [IJ65, 6.8]) anwenden: Es gibt ein deterministisches $\gamma \in [0, \infty)$,

$$\gamma := \lim_{t\to\infty} \frac{\lambda_{\leq 1}(t)}{\lambda_{>1}(t)} = \frac{m((0, 1])}{m((1, \infty))} \text{ fast-sicher.}$$

wobei

$$\lambda_{\leq 1}(t) := \lambda(\{s \leq t, \varphi(s,\omega,x) \in (0,1]\}) \text{ und}$$
$$\lambda_{>1}(t) := \lambda(\{s \leq t, \varphi(s,\omega,x) \in (1,\infty)\})$$

mit dem $\mathbb{R}$-Lebesgue-Maß λ.

Da sich der Diffusionsprozess auf $(0,\infty)$ bewegt, gilt aber $\lambda_{>1}(t) + \lambda_{\leq 1}(t) = t$ und somit

$$\gamma = \lim_{t\to\infty} \frac{t - \lambda_{>1}(t)}{\lambda_{>1}(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{\lambda_{>1}(t)} - 1.$$

Damit erhalten wir

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\lambda(\{s \leq t, \varphi(s,\omega,x) \in (1,\infty)\}) > 0$$

fast-sicher. Wir benutzen die charakteristische Funktion

$$\chi(t,\omega) := \begin{cases} 1, & (t,\omega) \in \{(t,\omega) : s \leq t, \varphi(s,\omega,x) \in (1,\infty)\} \\ 0, & (t,\omega) \notin \{(t,\omega) : s \leq t, \varphi(s,\omega,x) \in (1,\infty)\} \end{cases}$$

der Menge $\{(t,\omega) : s \leq t, \varphi(s,\omega,x) \in (1,\infty)\} \subset (\mathbb{T} \times \Omega)$ mit $\int_\Omega \chi(t,\omega) d\mathbb{P}(\omega) \leq 1$ für alle t und erhalten damit für beliebiges $\varepsilon_1 > 0$:

$$\frac{1}{t}\int_{[0,t]} \chi(\cdot,\omega) d\lambda > k - \varepsilon_1$$

fast-sicher mit $k > 0$ für hinreichend großes t. Daher gilt

$$\frac{1}{t}\int_{[0,t]}\int_\Omega \chi(\cdot,\omega) dP(\omega) d\lambda = \frac{1}{t}\int_\Omega\int_{[0,t]} \chi(\cdot,\omega) d\lambda dP(\omega) > k - \varepsilon_1,$$

durch Vertauschung der Integrationsreihenfolge nach dem Satz von Fubini, und dies steht im Widerspruch zu

$$\int_\Omega \chi(t,\omega) dP(\omega) \to 0 \text{ für } t \to \infty$$

was aus unserer Annahme $\varphi(t,\omega,x) \to 0$ in Wahrscheinlichkeit folgt. Daher muss $m((0,1]) < \infty$ gelten.

Nun kommen wir zur hinreichenden Bedingung (2). Sei $s_1(\infty) = \infty$. Entweder gilt $s_1(0) > -\infty$, dann haben wir fast-sichere Konvergenz gegen 0, wie bereits in Theorem (3.1) gezeigt. Es bleibt zu zeigen: $s_1(0) = -\infty$, $m((0,1]) = \infty$ und $m([1,\infty)) < \infty$ bedingen $\varphi(t,\omega,x)) \to 0$ in Wahrscheinlichkeit. Wir wählen ein $x > 0$ und beliebiges

$\varepsilon > 0$. Dazu gibt es ein $\delta > 0$:

$$\varepsilon m((\delta, \varepsilon]) > m([\varepsilon, \infty))$$

Nun gibt es eine Funktion $\tilde{b}$ mit $\tilde{b}(x) \geq b(x)$ für alle x, wobei $\tilde{b}(x) = b(x), x \in [\delta, \infty)$, aber $\tilde{m}((0,1]) < \infty$, mit dem Geschwindigkeitsmaß $\tilde{m}$ des aus der SDGl

$$dx = \tilde{b}(x)dt + \sigma(x)dW_t \tag{5}$$

erzeugten Diffusionsprozesses, siehe Lemma (A.10) im Anhang.

Sei $\tilde{\varphi}$ der durch die Gleichung (5) erzeugte Diffusionsprozess, dann gilt (wieder analog zu Gleichung (4)):

$$\limsup_{t\to\infty} \mathbb{P}(\tilde{\varphi}(t,\cdot,x) > \varepsilon) \leq \frac{\tilde{m}([\varepsilon,\infty))}{\tilde{m}((0,\infty))} \leq \frac{\tilde{m}([\varepsilon,\infty))}{\tilde{m}([\delta,\infty))} = \frac{m([\varepsilon,\infty))}{m([\delta,\infty))} \leq \varepsilon$$

Aus $\tilde{b} \geq b$ folgt mit dem *Vergleichstheorem* [IW81, VI, Theorem 1.1]:

$$\varphi(t,\omega,x) \leq \tilde{\varphi}(t,\omega,x)$$

und somit

$$\limsup_{t\to\infty} \mathbb{P}(\varphi(t,\omega,x) > \varepsilon) \leq \limsup_{t\to\infty} \mathbb{P}(\tilde{\varphi}(t,\omega,x) > \varepsilon) \leq \varepsilon.$$

Da ε beliebig gewählt werden kann, gilt für alle x: $x \to \infty : \varphi(t,\cdot,x) \to 0$ in Wahrscheinlichkeit, q.e.d.

4. Beispiele

Das durch die eindimensionale Stratonovich-SDGl

$$dx = b(x)dt + \sigma(x) \circ dW_t$$

induzierte ZDS soll nun auf Auftreten des Attraktors $\{0\}$ bzgl. der Wahl von b bzw. σ untersucht werden. Wir stellen zunächst folgende Voraussetzungen an die SDGl:

1. $b(0) = \sigma(0) = 0$ sowie $\sigma(x) > 0$ für alle $x > 0$.
2. $b(\cdot)$ ist Lipschitz-stetig, wächst also höchstens linear.
3. $\sigma \in \mathcal{C}^2$ und $\sigma \in B^2$ d.h. σ ist zweimal beschränkt differenzierbar: σ', σ'' sind beschränkt.

Da der Attraktor $\mathcal{A}(\omega) = \mathcal{A} = \{0\}$ deterministisch, also von ω unabhängig ist, können wir die Ergebnisse der Diffusionsdarstellung direkt verwenden. Außerdem ist der Attraktor eindeutig, wie im Korollar (1.12) gezeigt. Betrachten wir folgende direkte Konsequenzen aus dem Theorem (3.1) und dem Theorem (3.3):

Korollar 4.1 (zu Theorem (3.1)). *Sei (θ, φ) das durch die SDGl (1) erzeugte ZDS, s_1 die zugehörige Skalenfunktion. $\mathcal{A} = \{0\}$ ist ein Forward-Attraktor von (θ, φ) genau dann, wenn $s_1(0) > -\infty$ und $s_1(\infty) = \infty$ gilt.*

Korollar 4.2 (zu Theorem (3.3)). *Sei (θ, φ) das durch die SDGl (1) erzeugte ZDS, s_1 die zugehörige Skalenfunktion. $\mathcal{A} = \{0\}$ ist ein Pullback-Attraktor von (θ, φ) genau dann, wenn $m((0, 1]) = \infty$ und $m([1, \infty)) < \infty$ gilt.*

4.1. Forward- und Pullback-Attraktoren

Beispiel 4.3 (Alle Attraktoren).

$$dx = -xdt + x \circ dW_t$$

hat mit $\mathcal{A} = \{0\}$ sowohl Forward- als auch Pullback-Attraktor:

$$s_1(x) = \int_1^x \frac{2}{x} \exp\left(-2\int_1^v \frac{-y}{y^2} dy\right) dv = x^2 - 1,$$

also $s_1(0) = -1 > -\infty$ und $s_1(\infty) = \infty$ (sichert Forward-Attraktor), sowie

$$\bar{s}_1(x) = \int_1^x \frac{2}{x} \exp\left(2\int_1^v \frac{-y}{y^2} dy\right) dv = \frac{x^2 - 1}{x^2},$$

und damit $m((0,1)) = -\overline{s}_1(0) = \infty$ $m((1,\infty)) = \overline{s}_1(\infty) = 1 < \infty$ *(sichert Pullback-Attraktor).*

Beispiel 4.4 (gerichtete Attraktion).

$$dX_t = b(x)dt + x \circ dW_t$$

besitzt mit

$$b(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1] \\ -x, & x \in (2,\infty) \end{cases},$$

wobei b *auf* $(1,2]$ *L-stetig mit* $L < 2$ *(vgl. Voraussetzung (2) s.o.) fortgesetzt werden kann, nur den Pullback-, jedoch keinen Forward-Attraktor, mit*

$$b(x) = \begin{cases} -x, & x \in [0,1] \\ 0, & x \in (2,\infty) \end{cases}$$

hingegen nur den Forward-, jedoch keinen Pullback-Attraktor.

Beweis. Es ist $\sigma(x) = x$.

1. Sei
$$b(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1] \\ -x, & x \in (2,\infty) \end{cases}.$$
Dann gilt $s_1(x) = \overline{s}_1(x) = \int_1^x \frac{2}{x} \exp(0) = 2\ln(x) - 2\ln(1)$ für $x < 1$ und daher $s_1(0) = -\infty$, folglich liegt kein Pullback-Attraktor vor. Dafür gilt $m((0,1]) = -\overline{s}(0) = \infty$ und $m((2,\infty))$ entspricht $m((1,\infty)) = 1 < \infty$ aus dem Beispiel (4.3) bis auf einen konstanten Faktor, also existiert der Pullback-Attraktor $\mathcal{A} = \{0\}$.

2. Für
$$b(x) = \begin{cases} -x, & x \in [0,1] \\ 0, & x \in (2,\infty) \end{cases}$$
gilt analog: $s, \overline{s}$ stimmen auf $[0,1]$ mit obigem Beispiel (4.3) überein, dafür gilt $s_2(\infty) = \infty$, wir haben also einen Forward-Attraktor $\mathcal{A} = \{0\}$ sowie $m((2,\infty)) = 2\ln(\infty) - 2\ln(2) = \infty$, dies verhindert den Pullback-Attraktor,

q.e.d.

4.2. Schwache Attraktoren

Der Begriff des schwachen Attraktors erfordert lediglich die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit:

Korollar 4.5 (zu (3.4)). *Sei (θ, φ) das durch die SDGl (1) erzeugte ZDS, s_1 die zugehörige Skalenfunktion und m das entsprechende Geschwindigkeitsmaß.*

1. *Ist $\mathcal{A} = \{0\}$ ein schwacher Attraktor von (θ, φ) so gilt $s_1(\infty) = \infty$ und eine der Bedingungen:*
   - *a)* $s_1(0) > -\infty$
   - *b)* $s_1(0) = -\infty$ *und* $m((0,1]) = \infty$
2. *Ist $s_1(\infty) = \infty$ und gilt und eine der Bedingungen*
   - *a)* $s_1(0) > -\infty$
   - *b)* $s_1(0) = -\infty$ *und* $m((0,1]) = \infty$ *und* $m([1,\infty)) < \infty$

   so ist $\mathcal{A} = \{0\}$ ein schwacher Attraktor von (θ, φ).

Im Fall (1a) sowie (2a) ist $\mathcal{A}$ ebenfalls ein Forward-Attraktor. Andersherum ist jeder Forward- sowie Pullback-Attraktor ein schwacher Attraktor wie bereits in Korollar (1.10) gezeigt.

Wie bereits bewiesen ist jeder Pullback- und jeder Forward-Attraktor ebenfalls ein schwacher Attraktor. Die Umkehrung gilt nicht, zumindest sind Pullback- und Forward-Attraktor keine Konsequenzen voneinander. Da stellt sich die Frage, ob ein System mit schwachem Attraktor existiert, der weder Forward- noch Pullback-Attraktor ist.

Um den schwachen Attraktor zu ermöglichen, die starke Attraktion aber zu unterdrücken, sind folgende Annahmen erforderlich: $s_1(0) = -\infty, s_1(\infty) = m((0,1]) = m([1,\infty)) = \infty$ mit

$$s_1(x) = \int_1^x \frac{2}{|\sigma(x)|} \exp\left(-2\int_1^v \frac{b(y)}{\sigma^2(y)} dy\right) dv$$

und

$$m(I) = \int_I \frac{2}{|\sigma(x)|} \exp\left(2\int_1^v \frac{b(y)}{\sigma^2(y)} dy\right) dv = \int_I d\bar{s}_1(x).$$

Diese Auswahl erfüllt nicht die hinreichenden Bedingungen für den schwachen Attraktor (2b) von Korollar (4.5), wohl aber die notwendigen. Ein diesen Forderungen genügendes Beispiel hat also sicher weder Pullback- noch Forward-Attraktor, bleibt also noch zu zeigen, dass es ein Beispiel mit einem schwachen Attraktor gibt.

4.3. Ein spezielles Beispiel

Wir betrachten SDGl'en, deren erzeugte Diffusionsprozesse folgenden Bedingungen genügen: $s_1(0) = -\infty, s_1(\infty) = m((0,1]) = m([1,\infty)) = \infty$.

1. Die SDGl
$$dx = xdW_t$$
welche obigen Bedingungen genügt, besitzt die explizite Lösung $x(t) = xe^{W_t}$ und damit *keinen* Attraktor.

2. Die SDGl $dx = b(x)dt + \sigma(x) \circ dW_t$ mit
$$\sigma(x) := \frac{x^2}{1+x} \text{ und } b(x) := \frac{1}{2}\frac{x^3}{(x+1)^2} - \frac{1}{2}\sigma(x)\sigma'(x)$$
genügt ebenfalls obigen Bedingungen. Das Skalenmaß ist $p(x) = 2\ln(x)$.

Dieses Beispiel (2) wird von Michael Scheutzow in seinem Artikel [Sch02] konstruiert, die Existenz eines schwachen Attraktors zwar vorgeschlagen, jedoch nicht endgültig beweisen. Die Terme b und σ sind so gewählt, dass sie bei einfacher Skalenfunktion für $t \to \infty$ grade das erlaubte lineare Wachstum annehmen, für $t \to 0$ sich asymptotisch an die x-Achse schmiegen. Dabei verliert der stabilisierende b-Driftterm seine Wirkung etwas schneller als der störende σ-Term. Interessant mag die Tatsache sein, das bei einer Darstellung der SDGl in der Itô-Form genau die an den Driftterm montierte Korrektur $-\frac{1}{2}\sigma(x)\sigma'(x)$ wegfällt, und die Drift selbst dann bereits destabilisierend wirkt, es müsste also der Diffusionsterm $\sigma(x)dW_t$ die Stabilisierung über die Störung des Driftterms hinweg leisten.

Die methodische Untersuchung dieses Beispiels mit dem Ziel den schwachen Attraktor nachzuweisen, gestaltet sich jedoch schwierig. Das ist vor allem darin begründet, das ein Großteil der der Theorie rund um stochastische Differentialgleichungen Konvergenz-Aussagen mit fast-sicheren Ergebnissen liefert. Diese können jedoch nach unseren Voraussetzungen nicht halten, da sie ja fast-sichere Konvergenz und damit den absichtlich ausgeschlossenen Pullback- oder Forward-Attraktor bestätigen würden.

Scheutzow selbst schlägt folgenden Weg vor: Er betrachtet die Transformation $z = \ln(\varphi(t,\omega,x))$ der Lösung. Da das Skalenmaß $p(x) = 2\ln(x)$ ergibt, ist die transformierte Lösung $\ln(\varphi(t,\omega,x)) = \frac{1}{2}p(\varphi(t,\omega,x))$ und (wie mit der Itô-Formel nachzuprüfen) ein lokales Martingal, sie genügt der SDGl:
$$dz = \frac{1}{1+e^{-z}}dW_t$$

im Itô-Sinne. Scheutzow argumentiert nun, dass es sich um eine Brown'sche Bewegung handelt, die um den Faktor $\frac{1}{1+e^{-z}}$ beschleunigt bzw. gebremst wird, wenn ihr aktueller Wert z beträgt. Da $\lim_{z\to-\infty}\frac{1}{1+e^{-z}}=0$ ist, verbringt der Prozess die meiste Zeit mit bei zunehmender Tiefe steigender Wahrscheinlichkeit im negativen Bereich, und soll so schlussendlich in Wahrscheinlichkeit gegen $-\infty$ für $t\to\infty$ konvergieren. Damit würde für die untransformierte Lösung $\varphi(t,\cdot,x)\to 0$ in Wahrscheinlichkeit gelten, was zu beweisen war.

Leider konnte diese Eigenschaft bisher nicht nachgewiesen werden. Auch das Diffusionskalkül erwies sich hier als wenig fruchtbar: So ist eine geschlossene Lösung der Vorwärts- oder Rückwärtsgleichung zur Gewinnung der Diffusion P_t und damit der grenzwertigen Verteilung $P_t, t\to\infty$ schwierig, die Darstellung als Operatorexponentialfunktion divergiert.

4.4. Ein nur-schwacher Attraktor

Da das Beispiel von Scheutzow noch nicht bewiesen ist, bleibt die Vermutung, ein schwacher Attraktor müsse zumindest entweder ein Pullback- oder ein Forward-Attraktor sein. Daher wollen wir noch ein (recht konstruiertes) Beispiel vor einem allgemeineren Kontext ansehen, dessen ZDS leider nicht als Lösung einer SDGl erzeugt wird, sondern über direkte Angabe des Cozykels definiert ist. Es ordnet sich deshalb nicht der von uns untersuchten Klasse unter, dafür lässt sich hier aber die Existenz eines nur-schwachen Attraktors zeigen.

Wir benötigen zunächst wieder einige Definitionen:

Definition 4.6 (Ergodisches MDS). Sei $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\theta_t)_{t\in\mathbb{T}}$ ein MDS darüber, sowie $\mathcal{I}$ die σ-Algebra aller messbaren invarianten Mengen von θ:

$$\mathcal{I} := \{I\subset\Omega : I \text{ ist } \mathbb{P}-\text{messbar}, \theta(t)I = I \text{ für alle } t\in\mathbb{T}\}\subset\mathcal{F}$$

Dann heißt θ *ergodisch*, falls $\mathbb{P}(I)\in\{0,1\}$ für alle $I\in\mathcal{I}$.

Eine weitere Definition wollen wir zunächst mit folgendem Lemma motivieren:

Lemma 4.7. *Sei $X:\Omega\in\mathbb{R}$ eine Zufallsvariable und $(\theta_t)_{t\in\mathbb{R}}$ ein MDS über dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. Dann gilt*

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}X(\theta(\pm t))\in\{0,\infty\} \textit{ fast-sicher}$$

sowie

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}X(\theta(\pm t))\in\{-\infty,0\} \textit{ fast-sicher.}$$

Ist θ ergodisch, so sind diese Grenzwerte konstant auf Ω fast-sicher.

Beweis siehe [Arn98, Proposition 4.1.3 S.165]. Nun wenden wir Lemma (4.7) auf $\ln(X_t)$ an, und begründen damit folgende Definition:

Definition 4.8 (Temperierte ZV). Eine Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}^+$ heißt *von oben temperiert* bezüglich des MDS θ, falls gilt:

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln X(\theta(\pm t)) = 0 \text{ fast-sicher}$$

(andernfalls gilt: $\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{n} \ln X(\theta(\pm t)) = \infty$ fast-sicher). X heißt *von unten temperiert* bezüglich des MDS θ, falls gilt:

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln X(\theta(\pm t)) = 0 \text{ fast-sicher}$$

(andernfalls gilt: $\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{n} \ln X(\theta(\pm t)) = -\infty$ fast-sicher) und *temperiert*, falls X sowohl von oben als auch von unten temperiert ist.

Es gilt offensichtlich: X ist von oben temperiert genau dann, wenn $\frac{1}{X}$ von unten temperiert ist, und andersherum.

Wir definieren nun ein spezielles ZDS. Sei θ ein ergodisches, aperiodisches (d.h. $\theta_t\omega \neq \omega$ falls $t \neq 0$) MDS über $\mathbb{T} = \mathbb{R}$. Dazu bilden wir den Cozykel

$$\varphi(t, \omega, x) = \beta^t \frac{a(\theta(t)\omega)}{a(\omega)} x$$

auf $[0, \infty)$ mit der Zufallsvariable $a : \Omega \to \mathbb{R}^+$. Dies ist in der Tat ein Cozykel:

$$\begin{aligned}
\varphi(s + t, \omega, x) &= \beta^{(s+t)} \frac{a(\theta(s + t)\omega)}{a(\omega)} x \\
&= \beta^s \frac{a(\theta(s)\theta(t)\omega)}{a(\theta(t)\omega)} \beta^t \frac{a(\theta(t)\omega)}{a(\omega)} x = \varphi(s, \theta(t)\omega, \varphi(t, \omega, x)).
\end{aligned}$$

Für diesen Cozykel gelten folgende Eigenschaften: $\mathcal{A} = \{0\}$ ist ein

1. schwacher Attraktor von (θ, φ).
2. Forward-Attraktor von $(\theta, \varphi) \Leftrightarrow a$ ist von oben temperiert.
3. Pullback-Attraktor von $(\theta, \varphi) \Leftrightarrow a$ ist von unten temperiert.

Beweis. Wir zeigen zunächst $\varphi(t,\omega,x) \to 0$ in Wahrscheinlichkeit für alle x. Wähle ein beliebiges $\varepsilon > 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\varphi(t,\omega,x) \notin \mathcal{U}_\varepsilon(0)) &\le \mathbb{P}\left(\frac{|x|}{a(\omega)} > \varepsilon\beta^{-\frac{t}{2}} \vee a(\theta(t)\omega) > \beta^{-\frac{t}{2}}\right) \\
&\le \mathbb{P}\left(\frac{|x|}{a(\omega)} > \varepsilon\beta^{-\frac{t}{2}}\right) + \mathbb{P}\left(a(\theta(t)\omega) > \beta^{-\frac{t}{2}}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{|x|}{a(\omega)} > \varepsilon\beta^{-\frac{t}{2}}\right) + \mathbb{P}\left(a(\omega) > \beta^{-\frac{t}{2}}\right) \to 0
\end{aligned}$$

mit $t \to \infty$, da $\theta_t\mathbb{P} = \mathbb{P}$ für alle t und $\beta < 1$, also ist $\{0\}$ ein schwacher Attraktor.

Nun zeigen wir $\varphi(t,\omega,x) \to 0$ fast-sicher (Forward-Attraktor): Sei a von oben temperiert, dann auch der Cozykel, es gilt sogar

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln(\varphi(t,\omega,x)) = \ln(\beta) < 0.$$

und damit $\varphi(t,\omega,x) \to 0$. Ist a nicht von oben temperiert, so gilt

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln a(\theta(t)\omega) = \infty$$

und damit

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\varphi(t,\omega,x) \ge \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \varphi(t,\omega,x) = \infty.$$

Für den Pullback-Attraktor benutzen wir

$$\begin{aligned}
r(t) := \frac{1}{t} \ln \varphi(t,\theta(-t)\omega,x)) &= \ln\beta + \frac{1}{t} \ln a(\theta(t)\theta(-t)\omega) + \frac{1}{t} \ln \frac{|x|}{a(\theta(-t)\omega)} \\
&= \ln\beta + \frac{1}{t} \ln a(\omega) + \frac{1}{t} \ln \frac{|x|}{a(\theta(-t)\omega)}
\end{aligned}$$

mit $\limsup_{t\to\infty} r(t) = \ln\beta$, also $\lim_{t\to\infty} \varphi(t,\theta(-t)\omega,x) \to 0$ genau dann, wenn $\frac{|x|}{a(\omega)}$ von oben temperiert (bzw. $a(\omega)$ von unten temperiert) ist, und $\limsup_{t\to\infty} r(t) = \infty$ sonst, q.e.d.

Nun benötigen wir noch eine Zufallsvariable a, die untemperiert bzgl. θ ist. Die Konstruktion einer (wenngleich komplizierten) untemperierten Zufallsvariable geht aus der Ergodizität und Aperiodizität von θ durch [ACO99, Lemma 8.6] hervor. Allerdings ist diese lediglich nicht von oben temperiert. Es gelte also

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \xi(\theta(\pm t)) = \infty.$$

Dazu konstruieren wir eine nicht von unten temperierte Zufallsvariable $\overline{\xi}(\omega) = \frac{1}{\xi(\omega)}$. Nun setzen wir beide zusammen:

Dazu definieren wir zunächst eine Relation $\leftrightsquigarrow \subseteq \Omega \times \Omega$ auf Ω:

$$\omega_1 \leftrightsquigarrow \omega_2 \Leftrightarrow \text{ es gibt ein } t \in \mathbb{R} : \omega_1 = \theta_t \omega_2$$

und stellen fest, dass dies eine Äquivalenzrelation ist: Seien $\omega, \omega_1, \omega_2 \in \Omega$ dann gilt:

1. (Reflexivität) $\omega = \theta_0 \omega$, also $\omega \leftrightsquigarrow \omega$.
2. (Transitivität) Sei $\omega_2 = \theta_s \omega$ sowie $\omega = \theta_t \omega_1$, dann ist $\omega_2 = \theta_{s+t}\omega_1$, also $\omega_1 \leftrightsquigarrow \omega_2$.
3. (Symmetrie) Sei $\omega = \theta_t \omega_1$, dann gilt $\omega_1 = \theta_{-t}\omega$.

Nun wählen wir einen beliebigen, aber festen Repräsentanten $\omega_0(\omega)$ zu jeder Äquivalenzklasse aus $\Omega/_{\leftrightsquigarrow}$, d.h. $\omega_0(\omega) \in \Omega_\omega := \{\omega' \mid \omega' \leftrightsquigarrow \omega\}$. Definiere

$$\hat{\Omega}_\omega := \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \{\theta_t \omega_0(\omega) \mid t \in [2i, 2i+1)\} = \hat{\Omega}_{\omega_0(\omega)}.$$

Klar: $\hat{\Omega}_{\theta_t\omega} = \hat{\Omega}_{\omega_0(\omega)}$ für alle $t \in \mathbb{R}, \omega \in \Omega$. Damit können wir nun eine Zufallsvariable $a(\cdot)$ konstruieren:

$$a(\omega) : = \begin{cases} \max(\xi(\omega), \xi(\theta_1\omega)) & \omega \in \hat{\Omega}_\omega \\ \min(\overline{\xi}(\omega), \overline{\xi}(\theta_1\omega)) & \omega \notin \hat{\Omega}_\omega \end{cases}, \text{ also}$$

$$a(\theta_t\omega) = \begin{cases} \max(\xi(\theta_t\omega), \xi(\theta_{t+1}\omega)) & t+s \in \bigcup_{i\in\mathbb{Z}}[2i, 2i+1) \\ \min(\overline{\xi}(\theta_t\omega), \overline{\xi}(\theta_{t+1}\omega)) & t+s \in \bigcup_{i\in\mathbb{Z}}[2i+1, 2i+2) \end{cases}$$

für ein $s \in [0,1)$, und damit $\sup_{t<T} a(\theta_t\omega) \geq \sup_{t<T} \xi(\theta_t\omega)$ sowie $\inf_{t<T} a(\theta_t\omega) \leq \inf_{t<T} \xi(\theta_t\omega)$ für alle $T \in \mathbb{R}, \omega \in \Omega$. Damit gilt

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln a(\theta(\pm t)) \geq \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \xi(\theta(\pm t)) = \infty \text{ (a ist nicht von oben temperiert) und}$$
$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln a(\theta(\pm t)) \leq \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \overline{\xi}(\theta(\pm t)) = -\infty \text{ (a ist nicht von unten temperiert).}$$

Der Cozykel

$$\varphi(t, \omega, x) = \beta^t \frac{a(\theta(t)\omega)}{a(\omega)} x$$

besitzt mit einem solchen a daher nur den schwachen Attraktor $\mathcal{A}(\omega) = \{0\}$, jedoch weder Forward- noch Pullback-Attraktor.

5. Zusammenfassung und Ausblick

Wir haben verschiedene Typen stochastischer Attraktoren für zufällige dynamische Systeme eingeführt: Den Forward-, den Pullback-, und den schwachen Attraktor deterministischer Mengen.

Für die wichtige Klasse der durch stochastische Differentialgleichung erzeugten zufälligen dynamischen Systeme konnten wir genau-dann-wenn-Bedingungen für die starken Attraktoren, also die Forward- und Pullback-Attraktor benennen, für den schwachen Attraktor mussten wir uns mit notwendigen und hinreichenden Bedingungen begnügen, die eine schmale Lücke offen lassen. Da jeder starke Attraktor auch ein schwacher Attraktor ist, bleibt von dieser Lücke noch die umgekehrte Richtung interessant: Existiert ein schwacher stochastischer Attraktor, der weder Pullback- noch Forward-Attraktor ist? Wir haben das Beispiel von Scheutzow zitiert, das in diese Lücke schlägt, allerdings noch nicht bewiesen werden konnte.

Es ist allerdings bekannt, dass es zufällige dynamische Systeme mit dieser Eigenschaft gibt, wie in Kapitel (4.4) bzw. in [OA03] vorgeführt wurde. Diese Systeme sind jedoch direkt über den Cozykel definiert, und scheinen nicht mit der Klasse der aus stochastischen Differentialgleichungen erzeugbaren Cozykel zu fallen.

Daher wäre es von Interesse, das Beispiel von Scheutzow abzusichern. Dabei ist auch die Frage interessant, wie „groß“ die Klasse dieser besonderen Beispiele ist, und ob sie sich klar abgrenzen ließe, was vollständige genau-dann-wenn-Bedingungen für schwache Attraktoren zur Folge hätte. Alternativ wäre es immer noch vorstellbar, dass diese Klasse über den aus SDGl'en erzeugten Cozykel leer ist, also es keinen schwachen Attraktor einer SDGl gibt, der nicht wenigstens Pullback- oder Forward-Attraktor ist.

Eine weitere zukünftige Aufgabe wäre es, einen Beweis für die Eindeutigkeit des schwachen Attraktors deterministischer Mengen anzugeben, da meines Erachtens bisher lediglich die Eindeutigkeit für den Attraktor zufälliger Mengen gezeigt wurde (siehe Proposition (1.11)), und die Eindeutigkeit des Attraktors deterministischer Mengen daraus nicht trivial hervorgeht (solange der Attraktor nicht selbst eine deterministische Menge ist, wie er es in unseren Beispielen war).

A. Anhang

A.1. Transformation zwischen Itô- und Stratonovich-Darstellung

Bei der stochastischen Integration ist bei Wahl der Zerlegung die Auswahl der Auswertungsstelle auf den infinitesimalen Intervallen aufgrund der unbeschränkten Variation des Wienerprozesses nicht mehr beliebig, wie dies bei der Riemann'schen Integration der Fall ist. Zwei Festlegungen, die jeweils zu einem sinnvollen Integralbegriff führen, haben sich herausgestellt; das *Itô-Integral* $\int f(t,\omega)dW_t(\omega)$, welches die Funktionswerte am linken Intervallrand auswertet, und das *Stratonovich-Integral* $\int f(t,\omega) \circ dW_t(\omega)$, welches den Funktionswert aus der Intervallmitte benutzt.

Da sich einige Aussagen leichter in der Itô-, andere hingegen in der Stratonovich-Form darstellen lassen, findet man auch in der Literatur gleichermaßen Aussagen in der einen oder anderen der beiden Integral-Formen. Bei hinreichend glatten Integranden lässt sich das Stratonovich-Integral jedoch auf das Itô-Integral transformieren, und umgekehrt, indem ein *Itô-* bzw. *Stratonovich-Korrekturterm* hinzugenommen wird:

Lemma A.1. *Die stochastische Differentialgleichung im Itô-Sinne*

$$dx = b(x)dt + \sigma(x)dW_t$$

mit $\sigma \in \mathcal{C}^1$ *abkürzend für die Integralgleichung*

$$x(t) = \int_0^t b(x(\tau))d\tau + \int_0^t \sigma(x(\tau))dW_\tau$$

besitzt die selben Lösungen wie die Stratonovich-Differentialgleichung

$$dx = (b(x) - \frac{1}{2}\sigma(x)\sigma'(x))dt + \sigma(x) \circ dW_t$$

bzw.

$$x(t) = \int_0^t (b(x(\tau)) - \frac{1}{2}\sigma(x(\tau))\sigma'(x(\tau)))d\tau + \int_0^t \sigma(x(\tau)) \circ dW_\tau.$$

Analog gilt die Umkehrung Stratonovich-SDGl $\rightarrow$ *Itô-SDGl mit umgedrehten Vorzeichen des Korrekturterms.*

A.2. Die Itô-Formel

Einen stochastisches Itô-Integral gegebenen stochastischen Prozess nennt man *Itô-Prozess.* Die Itô-Formel entspricht der Kettenregel der deterministischen Analysis, sie ermöglicht eine Funktion eines Itô-Prozesses als Itô-Prozess darzustellen.

Definition A.2 (Itô-Prozess). Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(W_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ ein Wienerprozess darüber. Ein stochastischer Prozess heißt *(reelwertiger) Itô-Prozess*, falls er sich als stochastisches Itô-Integral $dx = b(\omega, t)dt + \sigma(\omega, t)dW_t$ mit

$$\int_0^t |b(\cdot, x)|dx < \infty \text{ fast-sicher und } \int_0^t \sigma^2(\cdot, x)dx < \infty \text{ fast-sicher}$$

für alle $t \in \mathbb{R}^+$ darstellen lässt.

Lemma A.3 (Itô-Formel für Itô-Prozesse). *Sei $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ ein Itô-Prozess, gegeben durch $dX_t = b(t)dt + \sigma(t)dW_t$ und $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, dann ist $Y_t = f(t, X_t)$ ebenfalls ein Itô-Prozess, und es gilt:*

$$\begin{aligned}
dY_t &= \frac{d\,f}{dt}(t, X_t)dt + \frac{d\,f}{dx}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dx^2}(t, X_t)(dX_t)^2 \\
&= \frac{d\,f}{dt}(t, X_t)dt + \frac{d\,f}{dx}(t, X_t)b(t)dt + \frac{d\,f}{dx}(t, X_t)\sigma(t)dW_t + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dx^2}(t, X_t)\sigma^2(t)dt}_{(*)} \\
&= \left(\frac{d\,f}{dt}(t, X_t) + \frac{d\,f}{dx}(t, X_t)b(t) + \frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dx^2}(t, X_t)\sigma^2(t)\right) dt + \frac{1}{2}\frac{d\,f}{dx}(t, X_t)\sigma(t)dW_t.
\end{aligned}$$

Im Vergleich zur deterministischen Analysis haben wir den zusätzlichen Korrekturterm (*) addiert, der im deterministischen Fall ($\sigma(x) \equiv 0$) wegfällt.

Analog zu obiger Transformation (A.1) erhält man die Itô-Formel für Stratonovich-Prozesse, die ohne Korrekturterm auskommt:

Lemma A.4 (Itô-Formel für die Stratonovich-Prozesse). *Sei $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ der stochastische Prozess, gegeben durch $dX_t = b(t)dt + \sigma(t) \circ dW_t$ mit dem Stratonovich-Integral und $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, dann gilt für $Y_t = f(t, X_t)$:*

$$dY_t = \left(\frac{d\,f}{dt}(t, X_t) + \frac{d\,f}{dx}(t, X_t)b(t)\right) dt + \frac{d\,f}{dx}(t, X_t)\sigma(t) \circ dW_t.$$

A.3. Martingale

Definition A.5 (Filtration). Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine aufsteigende Familie von σ-Algebren

$$\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{R}^+, \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F} \text{ für alle } 0 < s < t$$

heißt *Filtration*. Eine stochastischer Prozess (X_t) heißt *adaptiert* an die Filtration $(\mathcal{F}_t)$, falls X_t $\mathcal{F}_t$-messbar ist für alle t. Ein stochastischer Prozess erzeugt selbst seine *natürliche Filtration* $(\mathcal{F}_t^0) := \sigma(\{X_u, u < t\})$.

Definition A.6 (Martingale). Ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ adaptiert an $(\mathcal{F}_t)$ heißt *Submartingal*, falls

1. $\mathbb{E}X_t < \infty$ für alle t und
2. $\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) \geq X_s$ für alle $s, t : s < t$.

X heißt *Supermartingal*, falls $-X$ ein Submartingal ist. Ist X sowohl Sub- als auch Supermartingal, nennt man X ein *Martingal*; es gilt dann $\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) = X_s$ für alle $s, t : s < t$.

Lemma A.7. *(Siehe [RY99, II, Proposition 1.3]) Sei $T : \Omega \to \mathbb{R}^+$ eine Stoppzeit des Prozesses X, und sei X ein (Sub-, Super-)Martingal, dann ist der gestoppte Prozess $X_t^T = X_{min(t,T)}$ ebenfalls ein entsprechendes (Sub-, Super-)Martingal.*

Definition A.8 (lokales Martingal). Der $(\mathcal{F}_t)$-adaptierte stetige stochastische Prozess (X_t) heißt *(stetiges) lokales Martingal*, falls es eine steigende Folge von Stoppzeiten $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}, T_n \to \infty$ fast-sicher gibt, so dass gilt: Der Prozess $Y_t = \begin{cases} X_{\min(t,T_n)}, T_n > 0 \\ 0, T_n = 0 \end{cases}$ ist ein $\mathcal{F}_t$-Martingal.

Es gilt (siehe z.B. [RY99, IV, S.123]): Ein positives lokales Martingal ist ein Supermartingal, ein negatives lokales Martingal ein Submartingal.

A.4. Hilfssätze

Lemma A.9. *Sei $W : \Omega \times R \to \mathbb{R}$ ein Wienerprozess über dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, dann ist $X_t := W_{s+t} - W_s$ ebenfalls ein Wienerprozess über diesem Raum.*

Beweis. Wir zeigen die Eigenschaften des Wienerprozesses wie wir sie in Beispiel (1.2) definiert haben:

1. $X_0 = W_s - W_s = 0$.
2. $X_u - X_v = W_{s+u} - W_s - (W_{s+v} - W_s) = W_{s+u} - W_{s+v}$ und damit $X_u - X_v \sim \mathcal{N}(0, u - v)$ sowie
3. $W_{t_2+s} - W_{t_1+s}$ ist unabhängig von $W_{t_4+s} - W_{t_3+s}$ für alle $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$, q.e.d.

Lemma A.10. *Sei m das Geschwindigkeitsmaß des durch die SDGl*

$$dx = b(x)dt + \sigma(x)dW_t,\ b \in \mathcal{C}^{k,1},\ \ \sigma \in \mathcal{C}^{k+1,\frac{1}{2}} \tag{6}$$

erzeugten Diffusionsprozesses auf $X \subset \mathbb{R}^+$. Dann gibt es eine Konstante δ und eine Funktion $\tilde{b}$ mit $\tilde{b} \geq b$ punktweise, wobei $\tilde{b}(x) = b(x)$ für alle $x > \delta$, so dass $\tilde{m}((0,1]) < \infty$ mit dem Geschwindigkeitsmaß $\tilde{m}$ des aus der SDGl

$$dx = \tilde{b}(x)dt + \sigma(x)dW_t \tag{7}$$

erzeugten Diffusionsprozesses.

Beweis. Wähle

$$\tilde{b}(x) = \begin{cases} \sigma(x)\sigma'(x) & x \in [0,\varepsilon) \\ \mathcal{C}^{k,1}\text{-kompatibel} & x \in [\varepsilon,\delta) \\ b(x) & x \geq \delta \end{cases},$$

mit ε: $b(x) \leq \sigma(x)\sigma'(x)$ auf $x \in [0,\varepsilon)$. Dann ist $\tilde{b} \in \mathcal{C}^{k,1}$, $\sigma \in \mathcal{C}^{k+1,\frac{1}{2}}$, und es gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{m}((0,1]) &= \int_0^1 \frac{2}{|\sigma(x)|} \exp\left(2\int_1^x \frac{\tilde{b}(y)}{\sigma^2(y)}dy\right) dx \\ &< C_\varepsilon + \int_0^\varepsilon \frac{2}{|\sigma(x)|} \exp\left(-2\int_x^1 \frac{\sigma'(y)}{\sigma(y)}dy\right) dx,\ C \in (0,\infty) \\ &= C_\varepsilon + \int_0^\varepsilon \frac{2}{|\sigma(x)|} \exp\left(-2\ln\sigma(1) + 2\ln\sigma(x)\right) dx \\ &= C_\varepsilon + \int_0^\varepsilon \frac{2\sigma(x)}{\sigma^2(1)} dx < \infty, \end{aligned}$$

da $C_\varepsilon < \infty$. q.e.d.

Falls die SDGl (6) eine globale Lösung hat. Für die Integranden der zu der SDGl (7) zugehörigen Feller-Explosionsfunktion

$$\tilde{K}(x) := \int_c^x \tilde{\overline{p}}(v)\tilde{\overline{s}}_c(v)dv$$

gilt analog: $\tilde{\overline{s}}_c(0) = c < \infty$ dafür aber $\tilde{\overline{p}}(0) = \infty$ auf dem Intervall $[0,\varepsilon)$, damit bleibt das Explosionsverhalten der Lösung auch für die SDGl (7) erhalten.

A.5. Liste der Notationen

gebräuchliche Symbole

$\mathcal{P}(X)$	Menge aller Teilmengen von X
$\mathcal{B}_d(X)$	Menge der Borel-Mengen über X bzgl. der Metrik d.
$\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^-$	Menge der nicht-negativen (nicht-positiven) reellen Zahlen
$U_\varepsilon(x)$	offene ε-Umgebung des Punktes x
χ	die charakteristische Funktion einer Menge
$\mathcal{C}^n$	Menge aller n-mal stetig differenzierbaren Funktionen
$\mathcal{C}_0^n$	Menge aller n-mal stetig differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger
$\mathcal{C}^{n,\delta}$	Menge aller n-mal Hölder-stetig mit Ordnung δ differenzierbaren Funktionen
B^n	Menge aller n-mal differenzierbaren Funktionen mit beschränkten Ableitungen
$\mathcal{N}(0,1)$	die Standard-Normalverteilung
$\mathbb{E}X$	der Erwartungswert der Zufallsgröße X
L^*	der zu L formal adjungierte Operator
$\sigma(\mathcal{X})$	die kleinste σ-Algebra, die alle Mengen aus $\mathcal{X}$ enthält

hier verwendete Symbole

X	ein metrischer Raum
Ω	eine Ereignismenge
$\mathcal{F}$	eine σ-Algebra zu Ω
$\mathbb{P}$	ein Wahrscheinlichkeitsmaß über $(\Omega, \mathcal{F})$
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	ein Wahrscheinlichkeitsraum
W_t	ein Wienerprozess
$\int \cdot dW_t$	stochastisches Itô-Integral über dem Wienerprozess
$\int \cdot \circ dW_t$	stochastisches Stratonovich-Integral über dem Wienerprozess
θ	ein metrisches dynamisches System (Def.(1.1))
φ	ein zufälliger Fluss oder ein Cozykel (Def. (1.3)) über einem MDS
P_t	eine Feller-Dynkin-Familie,
T_t	die Diffusionshalbgruppe dazu (siehe Def. (2.6))
$\langle M_t \rangle$	der quadratische Variationsprozess zu M_t
$\leftrightsquigarrow$	die Invarianz-Äquivalenzrelation eines MDS (siehe Bsp. (4.4))

B. Literaturverzeichnis

[ACO99] Arnold, L., Nguyen D. C. und V. I. Oseledets: *Jordan normal form for linear cocycles*. Random Operators and Stochastic Equations, 7:203–358, 1999.

[Arn98] Arnold, L.: *Random Dynamical Systems*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1998.

[CF94] Crauel, H. und F. Flandoli: *Attractors for random dynamical systems*. Probability theory related fields, 100(3):365–393, 1994.

[Cra99] Crauel, H.: *Global random attractors are uniquely determined by attracting deterministic compact sets*. Annali di Matematica pura ed applicata, CLXXVI(IV):57–72, 1999.

[Cra01] Crauel, H.: *Random Point Attractors versus Random Set Attractors*. Journal of the London Mathematical Society, 63(2):413–427, 2001.

[HC98] H. Crauel, F. Flandoli: *Additive Noise destroys a Pitchfork Bifurcation*. Journal of Dynamics and Differential Equations, 10(2):259 – 274, 1998.

[IJ65] Itô, K. und H. P. McKean Jr.: *Diffusion Processes and their Sample Paths*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1965.

[IW81] Ikeda, N. und S. Watanabe: *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*. North-Holland Publishing Company / Kodansha Ltd. Tokio, 1981.

[KS91] Karatzas, I. und S. E. Shreve: *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. 1991. Second Edition.

[Kun90] Kunita, H.: *Stochastic flows and stochastic differential equations*. Cambridge University Press, 1990.

[OA03] Ochs, G. und P. Ashwin: *Convergence to local random attractors*. Dynamical Systems: An International Journal, 18(2):139–158, 2003.

[Och99] Ochs, G.: *Weak Random Attractors*. Report 449. Institut für Dynamische Systeme, Universität Bremen, 1999.

[RY99] Revuz, D. und M. Yor: *Continuous Martingales and Brownian Motion*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1999.

[Sch92] SCHMALFUSS, B.: *Backward cocycles and attractors of stochastic differential equations.* In: KOKSCH, N., V. REITMANN und T. RIEDRICH (Herausgeber): *Nonlinear dynamics: Attractor approximation and global behavior*, Seiten 185–191. Technische Universität Dresden, 1992.

[Sch02] SCHEUTZOW, M.: *Comparison of various concepts of a random attractor: A case study.* Archiv der Mathematik, 78:233–240, 2002.

[Ste01] STEINKAMP, M.: *Bifurcations of One Dimensional Stochastic Differential Equations.* Logos-Verlag Berlin, 2001.

C. Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, Paul Geisler, an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbst angefertigt und dabei nur die angegebenen Quellen genutzt habe. Diese Arbeit wurde noch nicht an anderer Stelle zu Prüfungszwecken vorgelegt.

Ilmenau, den 2. November 2004, ______________________________